Katechismus

der

Raumberechnung.

Katechismus

der

Raumberechnung

(Geometrie (Stereometrie)

oder

Anleitung zur Grössenbestimmung von Flächen und Körpern jeder Art.

Von

Friedrich Herrmann.

Mit 57 in den Text gedruckten Abbildungen.

Leipzig,
Verlagsbuchhandlung von J. J. Weber.
1862.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Hilfslehren.

Zweiter Abschnitt.

Die Berechnung der von geraden Linien und dem Kreise begrenzten Flächen und Körper.

Dritter Abschnitt.

Die Berechnung der von krummen Linien begrenzten Flächen und der Umdrehungskörper.

Vierter Abschnitt.

Berechnung der Maßgefäße.

Fünfter Abschnitt.

Die Berechnung der Baumstämme und der Erdarbeiten.

Katechismus der Raumberechnung.

Erster Abschnitt.

Hilfslehren.

1. Womit beschäftigt sich die Raumberechnung?

Sie beschäftigt sich mit der Bestimmung des Raumes, den eine Fläche oder ein Körper einnimmt, und vergleicht diesen mit bekannten Maßeinheiten für Fläche und Körper.

2. In welchem Sinne betrachtet sie den Raum?

Sie betrachtet ihn im Allgemeinen, wenn auch nicht im streng mathematischen Sinne, als eine Ausdehnung nach Länge und Breite, oder nach Länge, Breite und Höhe, und benennt die erste Größe Fläche, die andere Körper.

3. Wie ist das Verfahren der Raumberechnung?

Zunächst untersucht sie, welche Maße zur Bestimmung des Inhaltes der gesuchten Raumgröße nöthig sind; sodann lehrt sie die Gesetze, nach denen die gefundenen Maße in Rechnung gebracht werden müssen.

4. Was ist hiernach das Wesentlichste der Raumberechnung?

Die Kenntniß des zur Lösung einer gegebenen Frage aus dem Gebiete des Räumlichen erforderlichen Rechnungsverfahrens, wie solches durch Hilfe der Mathematik für den gegebenen Fall als Regel aufgestellt wurde.

5. Auf welche Weise lassen sich diese Regeln am übersichtlichsten und zweifelfreisten darstellen?

Der bestimmteste Ausdruck für eine solche Regel geschieht stets durch Hilfe allgemeiner Zeichen oder durch Formeln.

6. Welches sind die bekanntesten Rechnenzeichen?

Es sind folgende:

+ für die Addition. Es heißt z. B. 8 + 4 in Worten 8 plus (mehr oder und) 4;

— für die Subtraction. 10 — 5 heißt 10 minus (weniger) 5;

× oder . für die Multiplikation. 3 × 8 oder 3 . 8 heißt 3 mal (multiplizirt durch) 8;

: oder — (/) für die Division. 16 : 3 oder $\frac{16}{3}$ (16/3) heißt 16 dividirt durch 3;

= Zeichen der Gleichheit. 3 + 4 = 7 heißt: die Summe von 3 plus 4 ist gleich 7.

7. Was wird unter dem Quadrate und unter der Quadratwurzel einer Zahl verstanden?

Das Quadrat einer Zahl ist deren Produkt durch sich selbst. Dem Quadrate gegenüber wird diese Zahl die Wurzel genannt, d. h. die Quadratwurzel drückt eine Zahl aus, die durch sich selbst multiplizirt (quadrirt) einer andern gegebenen Zahl gleich ist.

8. Wie kann dieß durch ein Zahlenbeispiel deutlich gemacht werden?

Das Produkt von 8 × 8 ist 64. Die Zahl 8 heißt hier die Wurzel des Quadrats 64, und 64 ist das Quadrat der Wurzel 8. Ferner ist 299,29 das Produkt von 17,3 × 17,3; erstere Zahl ist also das Quadrat der Wurzel 17,3.

9. Welche Rechnungen kommen bei Suchung des Quadrates oder der Wurzel vor?

Die Berechnung des Quadrates aus der Wurzel — welche einfach durch Multiplikation vollzogen werden kann — nennt man die Potenzirung; die Suchung der Wurzel hingegen wird die Extraktion genannt.

10. Welche Rechnenzeichen sind für Potenzirung und Extraktion eingeführt?

Um zu bezeichnen, daß eine gegebene Zahl quadrirt (durch sich selbst multiplizirt) werden soll, wird ihr rechts oben eine kleine 2 beigesetzt. So heißt z. B. $91{,}4^2$ in Worten 91,4 hoch 2, oder Quadrat von 91,4 d. i. $91{,}4 \times 91{,}4$. Die Bezeichnung einer verlangten Extraktion geschieht durch ein verzogenes r (von radix, Wurzel), z. B. $\sqrt{81}$ wird gelesen Quadratwurzel aus 81. Die beigesetzte Zahl heißt der Wurzelexponent.

11. **Was ist eine Cubikzahl** (ein Cubus, Würfel) **und was eine Cubikwurzel?**

Ein Cubus entsteht, wenn das Quadrat einer Zahl nochmals durch diese Zahl (Wurzel) multiplizirt wird. Es ist z. B. $4 \times 4 \times 4 = 64$ und es heißt 4 die Wurzel der Cubikzahl 64, oder umgekehrt 64 der Cubus für die Wurzel 4. Das Zeichen für die Cubirung ist eine hochgestellte 3 und das Zeichen für die Cubikwurzel-Extraktion ist $\sqrt[3]{\ }$. Zum Beispiel heißt 6^3 in Worten 6 hoch 3 und bezeichnet $6 \times 6 \times 6$. Ferner wird $\sqrt[3]{718}$ gelesen: Cubikwurzel aus 718.

12. **Auf welche Weise werden zur bequemeren Uebersicht die Zahlengrößen in mathematischen Formeln ausgedrückt?**

Dadurch, daß für jede Größe ein Buchstabe des kleinen lateinischen oder des griechischen Alphabetes gesetzt wird. Was für eine Rechnenoperation mit diesen Größen vorgenommen werden soll, drückt man durch die bekannten Rechnenzeichen aus. Für die unbekannten, d. i. die zu suchenden Größen setzt man die letzten Buchstaben x, y, z rc. des Alphabets.

13. **Was ist hierbei noch zu bemerken?**

Zuerst, daß das Zeichen der Multiplikation gewöhnlich wegfällt, so daß man für $a \times b$ gleich ab schreibt; sodann, daß zusammengehörende Größenverbindungen durch Klammern (Parenthesen) eingeschlossen werden. In der Formel

$$x = {}^2/_3 a \sqrt{bc} + (a - b)$$

ist die unbekannte Größe x auf folgende Weise zu suchen: 1) b wird mit c multiplizirt und daraus die Quadratwurzel extrahirt;

2) letztere wird durch $^2/_3$ a multiplizirt; 3) zum Produkt wird der Unterschied von a — b addirt.

14. Haben hierbei die Buchstabengrößen ein für allemal einen bestimmten Werth?

In der Regel nicht. Eine Buchstabenformel drückt nämlich nur das Gesetz aus, nach welchem eine gesuchte Unbekannte aus den gegebenen Bekannten gefunden wird, oder wie sie von diesen abhängt. Die Zahlenwerthe der Buchstaben folgen für jeden einzelnen Fall aus der Aufgabe. Einige Buchstaben haben jedoch bestimmten Zahlenwerth, wie z. B. π ein für allemal 3,14159 bedeutet.

15. Auf welche Weise werden die Größen der Geometrie bezeichnet?

Die Linien durch an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben, wozu man gewöhnlich die des großen lateinischen Alphabetes wählt; die Winkel entweder durch drei Buchstaben, von denen der mittelste an der Spitze (dem Scheitel) des Winkels steht, oder durch einen in die innere Oeffnung der Spitze gestellten — gewöhnlich kleinen oder griechischen — Buchstaben. Z. B. für Fig. 1: Linie AB; Linie ACD; Winkel BAC (auch $\angle \beta$);

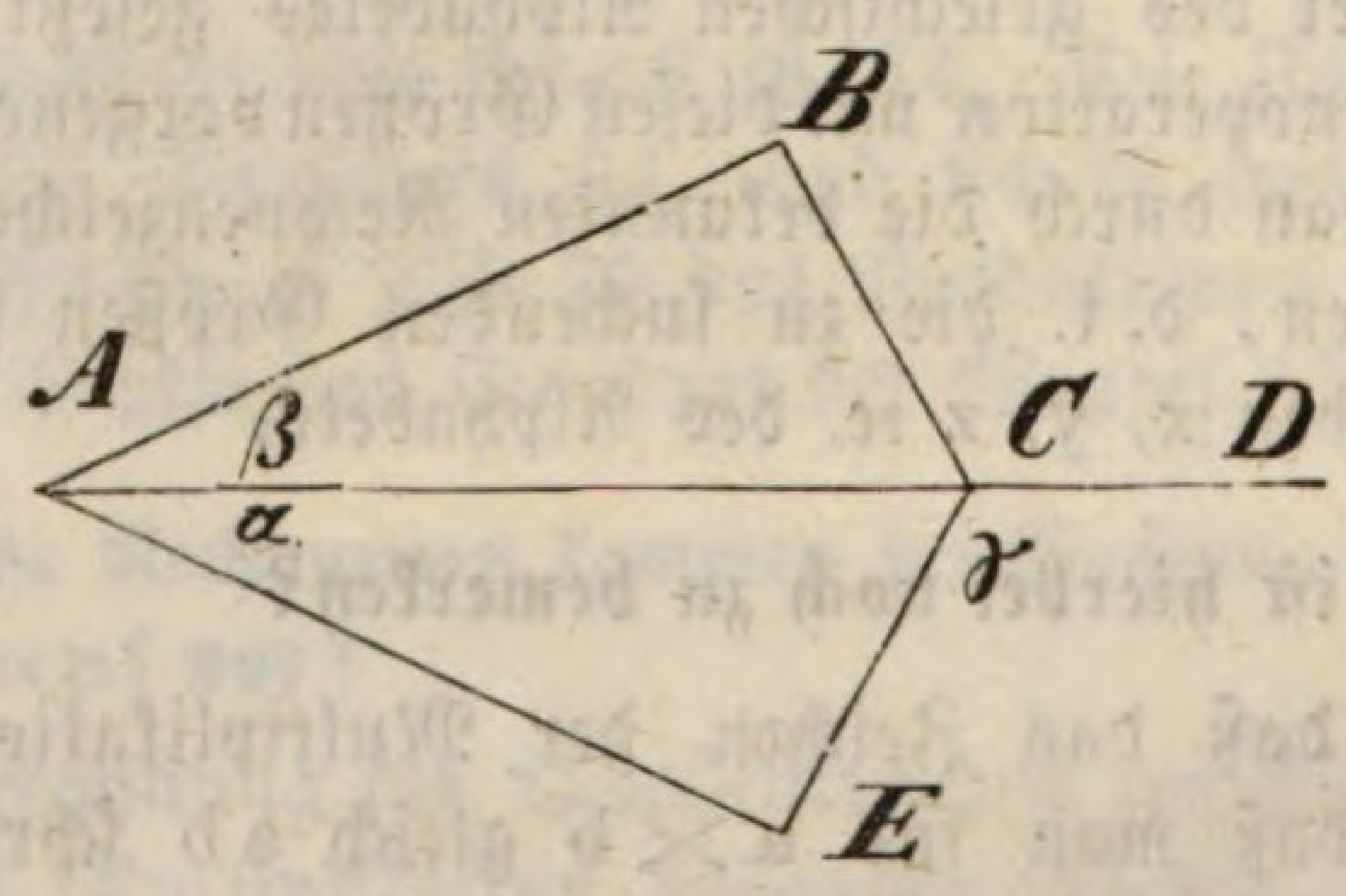


Fig. 1.

Winkel ECD ($\angle \gamma$) u. s. w. Hierbei drücken die neben einander stehenden Buchstaben nicht ein Produkt aus, als wie bei den Zahlengrößen.

16. **Wie sind die Grundbedingungen allgemeiner Größenbezeichnungen zu verstehen?**

Nach den vorstehenden Erklärungen haben zu sagen:

$a + b$ die Summenformel für a und b. Ist $a = 7$ und $b = 9$, so ist $a + b = 7 + 9 = 16$.

$a - b$ die Differenzformel für a weniger b. Ist $a = 21$ und $b = 11$, so ist $a - b = 21 - 11 = 10$.

abc die Produktenform für a mal b mal c. Ist $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$, so ist $abc = 2 \times 3 \times 4 = 24$.

$a : b$ oder a/b die Quotientenform für a dividirt durch b. Ist z. B. $a = 36$, $b = 9$, so ist $a/b = 36 : 9 = 4$.

a^n die allgemeine Form einer Potenz. Für a^2 und $a = 7$ hat man $7 \times 7 = 49$.

$\sqrt[n]{a}$ die allgemeine Form für eine Wurzel. Für $\sqrt[3]{a}$ und $a = 125$ hat man $\sqrt[3]{125} = 5$.

17. **Was drückt die Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ aus?**

Sie sagt, daß das Quadrat der Summe zweier Größen besteht aus der Summe der Quadrate beider Größen und dem doppelten Produkte derselben. Ist z. B. $a = 20$; $b = 7$, so ist

$$\begin{aligned} a^2 &= 20 \times 20 = 400 \\ 2ab &= 2 \times 20 \times 7 = 280 \\ b^2 &= 7 \times 7 = 49 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 &= 729 \end{aligned}$$

Eben so groß ist aber auch $(a + b) \times (a + b)$ oder 27×27.

18. **Und was die Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$?**

Daß das Produkt aus der Summe zweier Zahlen in ihren Unterschied gleich ist dem Unterschiede der Quadrate dieser Zahlen. Ist z. B. $a = 30$; $b = 9$, so ist $a + b = 39$; $a - b = 21$ und $(a + b)(a - b) = 39 \times 21 = 819$. Es ist aber auch nach der Formel

$$a^2 = 30 \times 30 = 900$$
$$\text{hiervon ab: } b^2 = 9 \times 9 = 81$$
$$\text{bleibt} = 819 \text{ w. o.}$$

19. **Wie ist die Formel $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ zu verstehen?**

Daß der Würfel der Summe zweier Zahlen aus der Summe folgender Theile besteht, als: dem Würfel der ersten Zahl + dem dreifachen Produkte aus dem Quadrate der ersten Zahl in die zweite + dem dreifachen Produkte der ersten Zahl in das Quadrat der zweiten + dem Würfel der zweiten Zahl. Ist z. B. a = 20 und b = 12, so ist auch

$$a^3 = 20 \times 20 \times 20 = 8000$$
$$3a^2b = 3 \times 20 \times 20 \times 12 = 14400$$
$$3ab^2 = 3 \times 20 \times 12 \times 12 = 8640$$
$$b^3 = 12 \times 12 \times 12 = 1728$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 32768$$

Eben diese Zahl findet sich aber auch, wenn a + b oder 32 zum Cubus erhoben wird, denn $32 \times 32 \times 32 = 32768$.

20. **Welches Verfahren dient zur Extraktion der Quadratwurzel?**

Zunächst wird die gegebene Quadratzahl von rechts nach links in zweiziffrige Classen zerlegt, wobei die erste Classe links auch nur eine Ziffer haben kann. Nach Vorschreibung des Wurzelzeichens sieht dieß für die Zahl 41375672 so aus:

$$\sqrt{41|37|56|72} =$$

Nun wird für die erste Classe die nächste Quadratwurzel gesucht, falls sie nicht eine Quadratzahl ist, wobei jedoch deren Quadrat kleiner sein muß, als genannte Classe. Diese Wurzel ist hier 6, denn 7 wäre zu groß, weil $7 \times 7 = 49$. Die weitere Rechnung zeigt folgendes Schema:

```
√ 41|37|56|72 = 6432,39
  36 . .
  ------
    537 . . . .  :  12(4)
    496 . . . .
    -----------
     4156 . .    :  128(3)
     3849 . .
     --------
      307 72     :  1286(2)
      257 24
      ------
       5048 00   :  12864(3)
       3859 29
       -------
       1188 7100 :  128646(9).
```

21. Wie ist vorstehende Berechnung zu verstehen?

Es wurde auf folgende Weise gerechnet: das Quadrat von 6 = 36 unter die erste Classe (41) gesetzt und abgezogen. Zum Reste (5) die zweite Classe (37) genommen, den gefundenen Wurzeltheil (6) verdoppelt und diese Zahl (12) mit dem Divisionszeichen nach voriger 537 gesetzt. Mit voriger 12 in diese 537 ohne die letzte Ziffer (also in 53) dividirt und den Quotient 4 neben die 6 der Wurzel und den Divisor 12 gesetzt, wodurch dieser = 124 wird. Letztere 124 durch vorige 4 multiplizirt, das Produkt unter obige 537 gesetzt und subtrahirt. Zum Reste (41) die nächste Classe (56) genommen, den gefundenen Wurzeltheil (64) verdoppelt und die erhaltene Zahl (128) nach dem Divisionszeichen neben 4156 gesetzt. Mit 128 in 415 dividirt, den Quotient (3) neben die 64 und die 128 gesetzt, die dadurch erhaltene 1283 mit voriger 3 multiplizirt und so Classe für Classe fortgefahren.

22. Wenn auf vorige Weise die letzte Classe abgefertigt ist, die Rechnung aber nicht aufgeht (d. h. wenn die gegebene Zahl keine Quadratzahl ist), auf welche Weise kann ein Dezimalbruch zur Wurzel gefunden werden?

Dadurch, daß dem letzten Reste zwei Nullen als Classe angehängt, nach der letzten Ziffer der Wurzel das Dezimalkomma gesetzt und ganz wie vorhin fortgerechnet wird. Sobald sich

übrigens für ein aus ganzen Zahlen bestehendes Quadrat ein Dezimalbruch bildet, kann die Wurzel nie genau und vollständig, sondern nur annähernd gefunden werden, oder sie bildet eine Irrationalzahl.

23. Im Falle die gegebene Zahl einen Dezimalbruch enthält oder einen solchen bildet, wie wird dann verfahren?

In diesem Falle muß die Classeneintheilung beim Dezimalkomma beginnen und von da nach rechts und links fortgehen. Hat die letzte Classe rechts nur eine Ziffer, so wird ihr eine Null zugesetzt und z. B. anstatt 0,375 = 0,|37,50 geschrieben.

24. Wie wird die Quadratwurzel aus gemeinen Brüchen gesucht?

Am bequemsten ist es, den gegebenen Bruch zuvor in einen Dezimalbruch zu verwandeln und dann zu rechnen, wie vorhin. Es ist z. B.

$$\sqrt{7/8} = \sqrt{0,875} = \sqrt{0,|87|50} = 0,93$$

0 . . . .
87 . .
81 . .
650 : 18(3) u. s. f.

25. Wie ist die Berechnung der Wurzeln aus 2, ¾ und 1,1 auszuführen?

Die Berechnung ist folgende:

$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$	$\sqrt{3/4} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866\ldots$
1	0 . .
100 : 2(4)	75
96	64
400 : 28(1)	1100 : 16(6)
281	996
11900 : 282	10400 : 172(6)

$$\sqrt{1,1} = \sqrt{1,10} = 1,049\ldots$$

```
 1
———
 1000    : 20(4)
  816
———
 18400  : 208(9)
```

26. Durch welches Verfahren kann das Suchen einer Quadratwurzel sehr erleichtert werden?

Dadurch, daß man zuerst die große Hälfte der nöthigen Wurzelziffern berechnet und mit ihrem Zweifachen in den Rest dividirt. Hierdurch erhält man stets noch einmal so viel weniger eine Ziffer mit Genauigkeit, als wie nach voriger Weise berechnet wurden. Um z. B. die Wurzel aus 3 bis auf 7 Ziffern genau zu finden, berechne man die ersten vier Ziffern und den Rest auf vorige Weise. Der Anfang der Wurzel ist 1,732; der Rest 176, oder mit Ergänzung 17600. Nun wird mit 2 × 1732 oder 3464 in 1760 dividirt, und der bis auf 3 Ziffern berechnete Quotient 051 (nahe) der vorhin gefundenen 1,732 beigesetzt, so daß nun 1,732051 die gesuchte Wurzel ist. Beim Dividiren selbst hat man stets nur eine Ziffer auf einmal dem Dividend anzuhängen.

27. Was sind die Quadratwurzeln aller ganzen Zahlen von 1 bis 150 mit drei Dezimalen?

Sie sind in folgender Tabelle enthalten:

Tafel der Quadratwurzeln aller Zahlen von 1 bis 150.

Zahl.	Quadrat-wurzel.	Zahl.	Quadrat-wurzel.	Zahl.	Quadrat-wurzel.	Zahl.	Quadrat-wurzel.	Zahl.	Quadrat-wurzel.
1	1,000	31	5,567	61	7,810	91	9,540	121	11,000
2	1,414	32	5,657	62	7,874	92	9,592	122	11,045
3	1,732	33	5,744	63	7,937	93	9,643	123	11,090
4	2,000	34	5,831	64	8,000	94	9,695	124	11,135
5	2,236	35	5,916	65	8,062	95	9,747	125	11,180
6	2,449	36	6,000	66	8,124	96	9,798	126	11,224
7	2,646	37	6,082	67	8,185	97	9,849	127	11,269
8	2,828	38	6,164	68	8,246	98	9,900	128	11,313
9	3,000	39	6,244	69	8,306	99	9,950	129	11,359
10	3,162	40	6,324	70	8,366	100	10,000	130	11,401
11	3,316	41	6,403	71	8,426	101	10,050	131	11,446
12	3,464	42	6,480	72	8,485	102	10,100	132	11,489
13	3,605	43	6,558	73	8,544	103	10,149	133	11,532
14	3.741	44	6,634	74	8,602	104	10,198	134	11,575
15	3,873	45	6,709	75	8,660	105	10,246	135	11,613
16	4,000	46	6,783	76	8,718	106	10,295	136	11,661
17	4,123	47	6,856	77	8,775	107	10,344	137	11,704
18	4,242	48	6,928	78	8,831	108	10,393	138	11,747
19	4,359	49	7,000	79	8,888	109	10,440	139	11,789
20	4,472	50	7,071	80	8,944	110	10,488	140	11,832
21	4,582	51	7,141	81	9,000	111	10,536	141	11,874
22	4,690	52	7,211	82	9,055	112	10,584	142	11,916
23	4,796	53	7,280	83	9,110	113	10,630	143	11,958
24	4,899	54	7,348	84	9,165	114	10,678	144	12,000
25	5,000	55	7,415	85	9,219	115	10,723	145	12,041
26	5,099	56	7,482	86	9,273	116	10,770	146	12,083
27	5,196	57	7,549	87	9,327	117	10,816	147	12,124
28	5,291	58	7,616	88	9,386	118	10,863	148	12,165
29	5,385	59	7,681	89	9,432	119	10,908	149	12,206
30	5,477	60	7,746	90	9,487	120	10,954	150	12,247

28. Wie ist das Verfahren zur Extraktion der Cubikwurzel?

Aus der in Frage 19 gegebenen Formel über die Entstehung der dritten Potenz läßt sich eine Regel zur Cubikwurzelextraktion ableiten. Dieselbe ist jedoch mühsam und zeitraubend, und weil überdieß Cubikwurzeln weniger zu suchen sind, als Quadratwurzeln, so genügen die hierzu aufgestellten Näherungsregeln.

29. Welches ist eine solche Näherungsregel?

Wird die gesuchte Wurzel x, die nächst kleinere Wurzel der Zahl = c, deren Cubus = c^3 und der Quotient von c^3 in die gegebene Zahl weniger c^3 (den Unterschied der Zahl und dem nächst kleinen Cubus) = f genannt, so ist

$$x = c\,(1 + \tfrac{1}{3} f - \tfrac{1}{9} f^2 + \tfrac{5}{81} f^3 \ldots) \text{ nahe.}$$

30. Wie kann mittelst dieser Formel die Cubikwurzel aus 200 berechnet werden?

Der nächst kleinere Cubus ist 125, dessen Wurzel ist 5,

also $c = 5$; $c^3 = 125$; $f = \frac{200 - 125}{125} = \frac{75}{125} = 0{,}6$

und also:

$$\sqrt[3]{200} = 5\,(1 + 0{,}2 - 0{,}04 + 0{,}01333\ \ldots)$$
$$= 5 \times 1{,}173 \text{ oder } 5{,}865 \text{ nahe.}$$

Zur Anwendung dieser Näherungsformel ist eine Hilfstafel, welche die Cuben der ersten natürlichen Zahlen enthält, sehr bequem.

31. Welches sind die Cuben aller ganzen Zahlen von 1 bis 48?

Tafel der Würfel aller Zahlen
von 1 bis 48.

Zahl.	Cubus.	Zahl.	Cubus.	Zahl.	Cubus.	Zahl.	Cubus.
1	1	13	2197	25	15625	37	50653
2	8	14	2744	26	17576	38	54872
3	27	15	3375	27	19683	39	59319
4	64	16	4096	28	21952	40	64000
5	125	17	4913	29	24389	41	68921
6	216	18	5832	30	27000	42	74088
7	343	19	6859	31	29791	43	79507
8	512	20	8000	32	32768	44	85184
9	729	21	9261	33	35937	45	91125
10	1000	22	10648	34	39304	46	97336
11	1331	23	12167	35	42875	47	103823
12	1728	24	13824	36	46656	48	110592

32. **Die Wurzel aus 87516 soll gefunden werden: wie ist die Rechnung?**

Der nächst kleinere Cubus ist nach voriger Tafel 85184 und dessen Wurzel 44. Man hat also $c = 44$; $c^3 = 85184$;

$$f = \frac{87516 - 85184}{85184} = \frac{2332}{85184} = 0{,}027.$$ Ferner ist

$f^2 = 0{,}000729$; $f^3 = 0{,}000019683$; $\frac{1}{3} f = 0{,}009$; $\frac{1}{9} f^2 = 0{,}000081$; $\frac{5}{81} f^3 = 0{,}000001215$ und also

$$x = 44\,(1 + 0{,}009 - 0{,}000081 + 0{,}000001215)$$
$$= 44 \times 1{,}008920215 = 44{,}392489\ldots$$

33. **Welches sind die Cubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 150?**

Sie sind auf 3 Dezimalstellen in folgender Tafel enthalten:

Tafel der Cubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 150.

Zahl.	Cubikwurzel.	Zahl.	Cubikwurzel.	Zahl.	Cubikwurzel.	Zahl.	Cubikwurzel.	Zahl.	Cubikwurzel.
1	1,000	31	3,141	61	3,936	91	4,498	121	4,946
2	1,260	32	3,175	62	3,958	92	4,514	122	4,959
3	1,442	33	3,207	63	3,979	93	4,531	123	4,973
4	1,587	34	3,240	64	4,000	94	4,547	124	4,986
5	1,710	35	3,271	65	4,020	95	4,563	125	5,000
6	1,817	36	3,302	66	4,041	96	4,579	126	5,013
7	1,913	37	3,332	67	4,061	97	4,595	127	5,026
8	2,000	38	3,362	68	4,081	98	4,610	128	5,039
9	2,080	39	3,390	69	4,101	99	4,626	129	5,052
10	2,154	40	3,420	70	4,121	100	4,641	130	5,066
11	2,223	41	3,448	71	4,141	101	4,656	131	5,078
12	2,289	42	3,476	72	4,160	102	4,672	132	5,091
13	2,351	43	3,503	73	4,179	103	4,684	133	5,104
14	2,410	44	3,530	74	4,198	104	4,702	134	5,117
15	2,466	45	3,557	75	4,217	105	4,717	135	5,130
16	2,520	46	3,583	76	4,236	106	4,732	136	5,143
17	2,571	47	3,609	77	4,254	107	4,747	137	5,155
18	2,621	48	3,634	78	4,272	108	4,762	138	5,167
19	2,668	49	3,659	79	4,291	109	4,776	139	5,180
20	2,714	50	3,684	80	4,309	110	4,791	140	5,192
21	2,759	51	3,708	81	4,327	111	4,806	141	5,205
22	2,802	52	3,732	82	4,344	112	4,820	142	5,216
23	2,844	53	3,756	83	4,362	113	4,834	143	5,229
24	2,884	54	3,780	84	4,379	114	4,848	144	5,241
25	2,924	55	3,803	85	4,397	115	4,863	145	5,253
26	2,962	56	3,826	86	4,414	116	4,877	146	5,265
27	3,000	57	3,848	87	4,431	117	4,891	147	5,277
28	3,036	58	3,871	88	4,448	118	4,904	148	5,289
29	3,072	59	3,893	89	4,465	119	4,918	149	5,301
30	3,107	60	3,915	90	4,481	120	4,932	150	5,313

34. **Welches sind die bei uns üblichsten Längenmaße?**

Als Einheit gilt noch vielfach der Fuß, welcher in 10 oder 12 Zoll getheilt wird (Dezimal- und Duodezimaltheilung). Die Länge von 2 Fuß nennt man oft Elle; die Länge von 6 Fuß Klafter, so wie man noch Ruthen, Lachter, Faden ꝛc. unterscheidet.

35. **Was ist unter Flächen- und Körpermaß zu verstehen?**

Für Flächen dient ein Quadrat von bestimmter Länge und Breite, für Körper ein Würfel von bestimmter Länge, Breite und Höhe als Einheit. Ein Quadratfuß ist also einen Fuß lang und einen Fuß breit und eine Cubikruthe eine Ruthe lang, breit und hoch. Weil bei der Dezimaltheilung 1 Fuß = 10 Zoll à 10 Linien, so ist

1 Quadratfuß	(□ F.)	= 100 □ Zoll	=	10000 □ Lin.
1 Cubikfuß	(CF.)	= 1000 CZoll	=	1000000 CLin.

Da weiter beim Duodezimalmaß 1 F. = 12 Z. à 12 Lin. ist, so hält

1 Quadratfuß	= 144 □ Zoll	=	20736 □ Lin.
1 Cubikfuß	= 1728 CZoll	=	2985984 CLin.

36. **Wie ist die Begründung und die Eintheilung des französischen natürlichen Maßes?**

Früher rechnete man zu wissenschaftlichen Zwecken durchaus nach dem alten Pariser Fuß — pied du roi — und theilte ihn in 12 Zoll, à 12 Linien, à 10 Punkte, oder überhaupt in 1440 gleiche Theile. Seit der französischen Revolution ist jedoch der Meter (Mètre) als Maßeinheit eingeführt. Derselbe ist gleich dem zehnmilliontesten Theile des nördlichen Erdmeridianquadranten und mißt nach altem Maße 3,078444 Fuß oder 443,295936 alte Par. Linien, wofür gesetzlich 443,296 Lin. festgesetzt sind. Seine Eintheilung ist folgende:

1 Myriameter	=	10000 Meter	=	30784,44	alte Par.	Fuß.
1 Kilometer	=	1000 „	=	3078,444	„ „	„
1 Hectometer	=	100 „	=	307,8444	„ „	„
1 Decameter	=	10 „	=	30,78444	„ „	„
1 Meter	=	1 „	=	3,07844	„ „	„
1 Dezimeter	=	1/10 „	=	3,69413	„ „	Zoll
1 Centimeter	=	1/100 „	=	4,43296	„ „	Linien
1 Millimeter	=	1/1000 „	=	0,443296	„ „	„

37. Wie vergleichen sich die Längen-, Flächen- und Körpermaße der für uns wichtigsten Länder mit dem Meter?

Wie viel Längen-, Quadrat- und Cubikmeter die Längen-, Quadrat- und Cubikfuß folgender Länder betragen, zeigt nachstehende Tabelle:

1 Fuß in	hat Meter		
	Länge	Quadrat	Cubus
alt Pariser . . .	0,324839	0,105521	0,034277
neu Pariser . . .	0,333333	0,111111	0,037037
englisch	0,304795	0,092900	0,028315
preußisch . . .	0,313854	0,098504	0,030916
Wiener	0,316111	0,099926	0,031588
bayrisch	0,291859	0,085182	0,024861
württembergisch .	0,286490	0,082077	0,023514
hannöverisch . .	0,292095	0,085319	0,024921
sächsisch	0,283190	0,080197	0,022711
badisch	0,300000	9,090000	0,027000

38. Auf welche Weise kann vorstehende Tabelle zur Vergleichung verschiedener Maße benutzt werden?

Es sei z. B. die Frage, wie viel 1716 sächs. Cubikfuß in preußischem Maße betragen. Mit vier Dezimalen hat 1 preuß. Cubf. = 0,0309 und 1 sächs. = 0,0227 Cubikmeter. Hieraus folgt nachstehender Kettensatz:

? preuß. Cubf. = 1716 sächs. Cubf.
1 = 0,0227 Cub. Meter
0,0309 = 1 pr. Cubf.

Die Berechnung giebt 1716 sächs. = 1260,6213 preuß. Cubikfuß.

39. Welche Maßeinheiten kommen in den vorhin genannten Ländern noch vor?

In Frankreich: 2 Meter = 1 toise; 1,2 Meter = 1 aune; 10000 Meter = 1 lieue; 8000 Meter = 1 poste; 10 Meter = 1 Kette.

In England: 3 Fuß = 1 yard; 5 ½ yard = 1 pole (rod); 40 poles = 1 furlong; 8 furlongs = 1 mile.

In Preußen: 12 Fuß = 1 Ruthe; 6 Fuß = 1 Faden; 6⅔ Fuß = 1 Lachter; 2000 Ruthen = 1 Meile.

In Oesterreich: 10 Fuß = 1 Ruthe; 2,465 Fuß = 1 Wiener Elle; 6 Fuß = 1 Klafter; 24000 Fuß = 1 Meile.

In Bayern: 10 Fuß = 1 Ruthe; $2^{41}/_{48}$ Fuß = 1 Elle; 6 Fuß = 1 Klafter.

In Württemberg: 1 Ruthe = 10 Fuß; 2,214 Fuß = 1 Elle.

In Hannover: 16 Fuß = 1 Ruthe; 2 Fuß = 1 Elle; 6 Fuß = 1 Klafter; 25400 Fuß = 1 Meile.

In Sachsen: 15 ⅙ Fuß = 1 Ruthe (Straßenbau = 16 Fuß, Eisenbahn = 20 Fuß); 2 Fuß = 1 Elle; 6 Fuß = 1 Klafter; 2 Meter = 1 Lachter; 32000 Fuß = 1 Meile.

In Baden: 10 Fuß = 1 Ruthe; 2 Fuß = 1 Elle; 6 Fuß = 1 Klafter; 29630 Fuß = 1 Meile.

40. Was wird unter dem Hohlmaße verstanden?

Ein Hohlmaß ist die Raumeinheit zur Bestimmung der Menge einer Frucht oder einer Flüssigkeit. Als Maß selbst dient gewöhnlich ein hohler Cylinder, seltener ein Kegelstutz, von bestimmtem Inhalte. Leider sind die Frucht- und Flüssigkeitsmaße in den verschiedenen Ländern, ja selbst oft in verschiedenen Provinzen, sehr verschieden, was deren Vergleichung sehr erschwert; abgesehen davon, daß häufig die gesetzliche Größe nicht genau bekannt ist.

41. Wie vergleichen sich die wichtigsten Hohlmaße?

In Frankreich ist das Liter = 1 Cubikdezimeter = 0,001 Cubikmeter = 1000000 Cubikmillimeter die Einheit. Die Eintheilung auf- und abwärts richtet sich nach dem Dezimalsystem, mit den in Frage 36 angegebenen Stufenbenennungen. Das Hectoliter = 100 Liter, ist Einheit des Fruchtmaßes.

In England hat ein Bushel Fruchtmaß 35725320 Cub.-Millimeter. 80 Bushel = 40 Strikes = 20 Combs = 10 Quarters = 2 Weys = 1 Last. — 1 Gallon Wein = 3788751 Cub.-Millim. 252 Gallon = 1 Tun. — 1 Gallon Bier = 4542550 Cub.-Millim. 216 Gallon = 1 Tun.

In Preußen hat 1 Wispel = 2 Malter = 24 Scheffel = 96 Viertel = 384 Metzen = 1536 Mäßchen Fruchtmaß. 1 Scheffel = 54381440 Cub.-Millim. — 1 Fuder = 4 Oxhoft = 6 Ohm = 12 Eimer = 24 Anker = 720 Quart (1 Tonne = 100 Quart) Getränkemaß. 1 Quart = 1150510 Cub.-Millim.

In Oesterreich hat 1 Metzen = 8 Achtel = 32 große = 64 kleine Maßeln = 128 Becher Fruchtmaß. 1 Metzen = 61499370 Cub.-Millim. — 1 Eimer = 40 Maß = 160 Seidel = 320 Pfiff Getränkemaß. 1 Maß = 1415015 Cub.-Millim.

In Bayern hat 1 Schaff = 6 Metzen Fruchtmaß. 1 Schaff = 222861600 Cub.-Millim. — 1 Eimer = 60 Maß Getränkemaß. 1 Maß = 617132 Cub.-Millim.

In Hannover hat 1 Last = 2 Wispel = 96 Himten Fruchtmaß. 1 Himte = 31103450 Cub.-Millim. — 1 Fuder = 4 Oxhoft = 6 Ahm = 15 Eimer = 480 Maß = 960 Quartier Getränkemaß. 1 Quartier = 971983 Cub.-Millim.

In Sachsen hat 1 Wispel = 2 Malter = 24 Schffl. = 96 Viertel = 384 Metzen = 1536 Mäßchen Fruchtmaß. 1 Scheffel = 106680100 Cub.-Millim. — 1 Fuder = 2⅖ Faß = 12 Eimer = 8 8/35 Tonnen = 864 Kannen Getränkemaß. 1 Kanne = 1204069 Cub.-Millim. (Gesetzlich ist der Scheffel zu 7900 und die Kanne zu 71,1863 Dresd. Cubzoll festgestellt.)

In Württemberg hat der Scheffel 8 Simri = 32 Vierling = 256 Ecklein = 1024 Viertlein Fruchtmaß. 1 Simri = 22153300 Cub.-Millim. — 1 Fuder = 6 Eimer = 96 Imi = 960 Maß = 3840 Schoppen Getränkemaß. 1 Eimer Helleich = 293927000; Trübeich = 306786000 Cub.-Millim. 1 Schenkmaß = 1670050 Cub.-Millim.

In Baden hat 1 Zuber = 10 Malter = 100 Sester = 1000 Mäßlein Fruchtmaß. — 1 Fuder = 10 Ohm = 100 Stütze = 1000 Maß Getränkemaß. — Mäßlein und Maß sind gleich groß; beide haben 1500000 Cub.-Millim.

42. **Was wird unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers verstanden?**

Das spezifische Gewicht drückt aus, um wie viel mal ein Körper schwerer ist, als wie ein gleichgroßer Raum Wasser. Wird z. B. ein Gefäß, welches 1 Dresdner Kanne faßt, mit Wasser gefüllt, so wird dieses Wasser nahe 2 Pfund wiegen. Gießt man nun das nämliche Gefäß mit Blei aus, so wird dessen Gewicht nahe 23 Pfund sein. Das Blei ist also $\frac{23}{2}$ oder 11,5 mal so schwer, als wie Wasser, und dieß nennt man sein spezifisches Gewicht. Feste und flüssige Körper werden durchaus mit dem Wasser, als Einheit, verglichen. Uebrigens wiegt ein Cubikdezimeter Wasser = 1 Kilogramm; 1 preuß. Cubikfuß = 61,73 Pfd.; 1 österreichischer Cub.-Fuß = 56,3 österr. Pfd.; 1 bayr. Cub.-F. = 44,3 Pfd.; 1 hannöv. Cub.-F. = 49,7 hann. Pfd.; 1 sächs. Cub.-F. = 45,4 Pfd.

43. **Welches sind die spezifischen Gewichte der häufigst vorkommenden Körper?**

Körper.	spezif. Gewicht.	Körper.	spezif. Gewicht.
Ahornholz	0,75	Kalkerde	2,83
Alkohol	0,79	Kalkstein	2,57
Asphalt	1,11	Kupfer, gegossen .	8,79
Basalt	2,79	Messing, gegossen .	8,40
Blei, gegossen { englisch	11,60	Platin, gegossen .	20,85
Blei, gegossen { deutsch	11,35	Sand aus Bächen .	1,90
Dachschiefer, mittel . .	2,67	Sandstein	2,32
Eisen, gegossen . . .	7,25	Sommereiche . . .	0,85
„ geschmiedet, engl.	7,79	Stahl	7,82
Erde, mittel	2,05	Tannenholz . . .	0,55
Gold, gegossen . . .	19,26	Thon	1,80
Granit	2,75	Wasser	1,00

44. Auf welche Weise kann diese Tafel angewendet werden?

Zunächst ist durch Hilfe dieser Tabelle und der zu Ende der 42. Frage gegebenen Zahlen leicht zu berechnen, wie viel Pfund ein Cubikfuß eines Stoffes nach den Maßen und Gewichten der angegebenen Länder wiegt. So ist z. B. in Oesterreich das Gewicht von 1 Cub.-F. Stahl = 7,82 × 56,3 = 440,266 Pfd. Weiter läßt sich aus dem gegebenen Rauminhalte eines Körpers sein Gewicht berechnen. Hätte z. B. eine gußeiserne Kugel 73,4 Cub.-Zoll sächs., so wäre ihr Gewicht (1 Cub.-Fuß = 1728 Cub.-Zoll) durch folgenden Ansatz zu finden:

x *Ul.* = 73,4 Cubz.
1728 = 7,25 × 45,4 Pfd.

Umgekehrt kann aber auch aus dem Gewichte eines Körpers sein Rauminhalt gefunden werden. Wiegt z. B. ein Sandsteinquader 33 Ctr. bayr., so ist sein Cubikinhalt nach folgendem Ansatze zu berechnen:

x Cubf. = 33 Ctr.
1 = 100 Pfd.
2,32 × 44,3 = 1 Cubfuß.

---

45. Welche leitenden Grundsätze sind bei der Raumberechnung vorzüglich ins Auge zu fassen?

Zunächst müssen alle Linien, welche zur Berechnung nothwendig sind, genau und nach derselben Maßeinheit gemessen werden. Wollte man z. B. die Länge eines Vierecks in Ruthen und die Breite in Metern ausdrücken, so würde das Produkt weder Quadratruthen noch Quadratmeter, sondern gar Nichts bezeichnen. Ebenso unzulässig wäre es, die Länge nach sächsischem und die Breite nach preußischem Maße bestimmen zu wollen.

Zweitens müssen alle Linien mit größter Schärfe und womöglich zweimal gemessen werden, auch muß man überzeugt sein, daß der Maßstab, welchen man gebraucht, die gesetzliche Länge hat. Letztere Vorsicht kann nicht genug empfohlen werden, weil die käuflichen Maßstäbe gewöhnlich sehr abweichende Längen haben.

Weiter müssen alle zur Berechnung dienenden Maße senkrecht auf einander stehen, so wie endlich die Berechnung selbst mit größter Sorgfalt und zweimal ausgeführt werden muß. Die Anwendung der Dezimalbrüche ist durchweg vortheilhaft.

Zweiter Abschnitt.

Die Berechnung der von geraden Linien und dem Kreise begrenzten Flächen und Körper.

46. Was wird unter einem Quadrate verstanden?

Das Quadrat ist eine regelmäßig vierseitige Fläche Fig. 2, deren Seiten gleich groß und deren Winkel sämmtlich rechte sind.

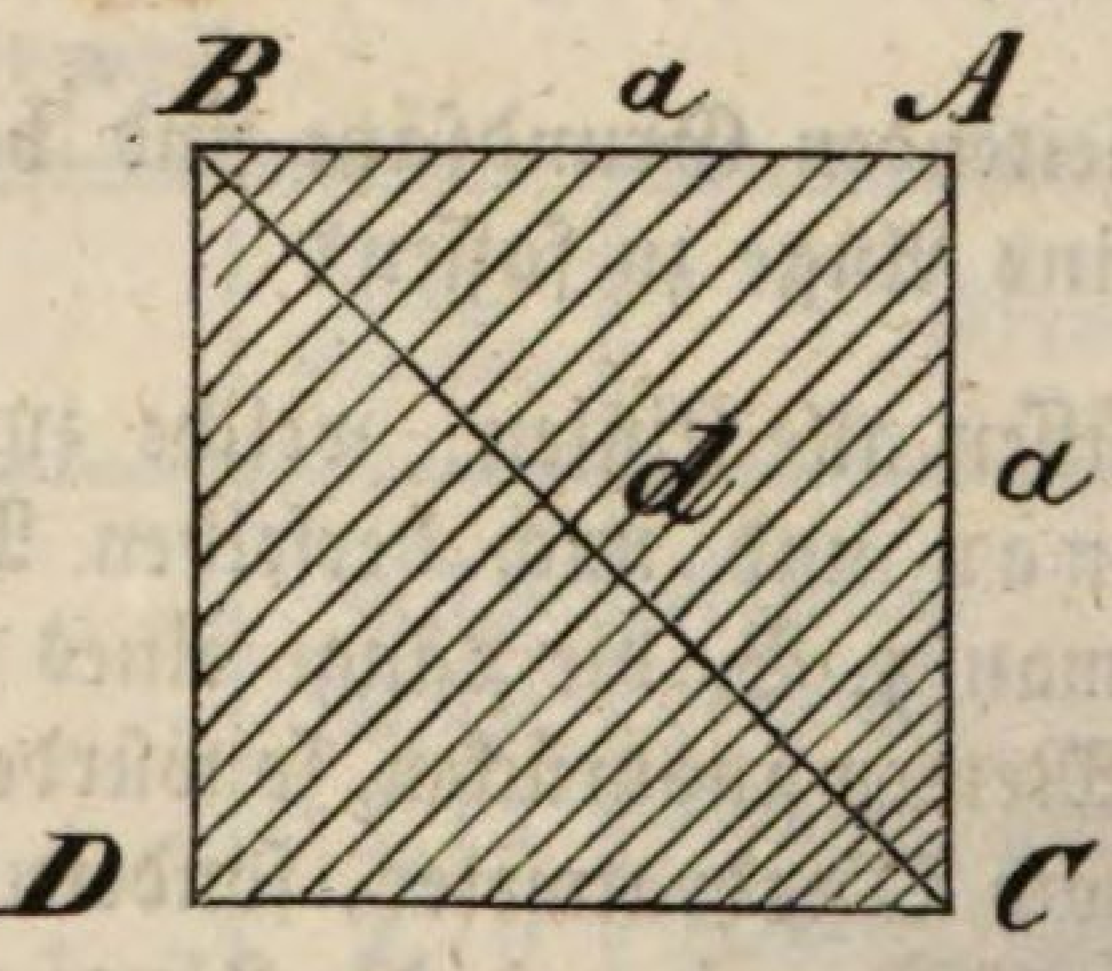


Fig. 2.

47. Was unter einer Diagonale?

Die gerade Linie, welche in einer eckigen Figur von einer Winkelspitze nach einer anderen gezogen ist, wie z. B. BC Fig. 2.

48. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung des Quadrates?

Wenn die Seite AB, AC u. s. w. durch a., so wie die Diagonale durch d bezeichnet wird, so hat man:

1) Fläche $= a^2 = \frac{1}{2}d^2$.
2) Diagonale $= \sqrt{2a^2} = 1{,}414\ a$.
3) Seite $= \sqrt{F} = 0{,}707\ d$.

49. Wie wird hiernach die Fläche eines Quadrates gefunden?

Entweder dadurch, daß man seine Seite durch sich selbst multiplizirt. Mißt z. B. die Seite AB oder a Fig. 2 = 17,1 Zoll, so ist der Inhalt des Quadrates = 17,1 × 17,1 oder 292,41 Quadratzoll. —Oder dadurch, daß man die Diagonale durch sich selbst multiplizirt, und das Produkt halbirt. Ist z. B. die Diagonale BC (d) Fig. 2 = 21,3 Fuß, so ist der Flächeninhalt = ½ × 21,3 × 21,3 = ½ × 453,69 oder 226,85 □Fuß.

50. Wie wird die Diagonale eines Quadrates aus dessen Seite berechnet?

Dadurch, daß man aus dem doppelten Quadrate der Seite a die Quadratwurzel extrahirt, oder einfacher, daß man die Seite 1,414 mal nimmt. Die Diagonale eines Quadrates von 10 Ellen Seite ist also 10 × 1,414 = 14,14 Ellen.

51. Die Seite eines Quadrates soll aus dessen Fläche und sodann aus dessen Diagonale gefunden werden: wie ist die Rechnung?

Die Quadratwurzel aus der Fläche giebt die Seite. Ist die Fläche z. B. 313 □Meter, so ist die Seite = $\sqrt{313}$ = 17,6918 Meter. — Die Diagonale durch 0,707 multiplizirt, giebt die Seite ebenfalls. Mißt z. B. die Diagonale 213,5 Ruthen, so ist die Seite 213,5 × 0,707 = 150,944 Ruthen.

52. Welche Eigenschaften hat das Rechteck?

Es ist ein von zwei senkrecht auf einander stehenden Parallelenpaaren begrenztes Viereck ABCD Fig. 3, dessen Seiten mithin paarweise gleich und dessen Winkel sämmtlich rechte sind.

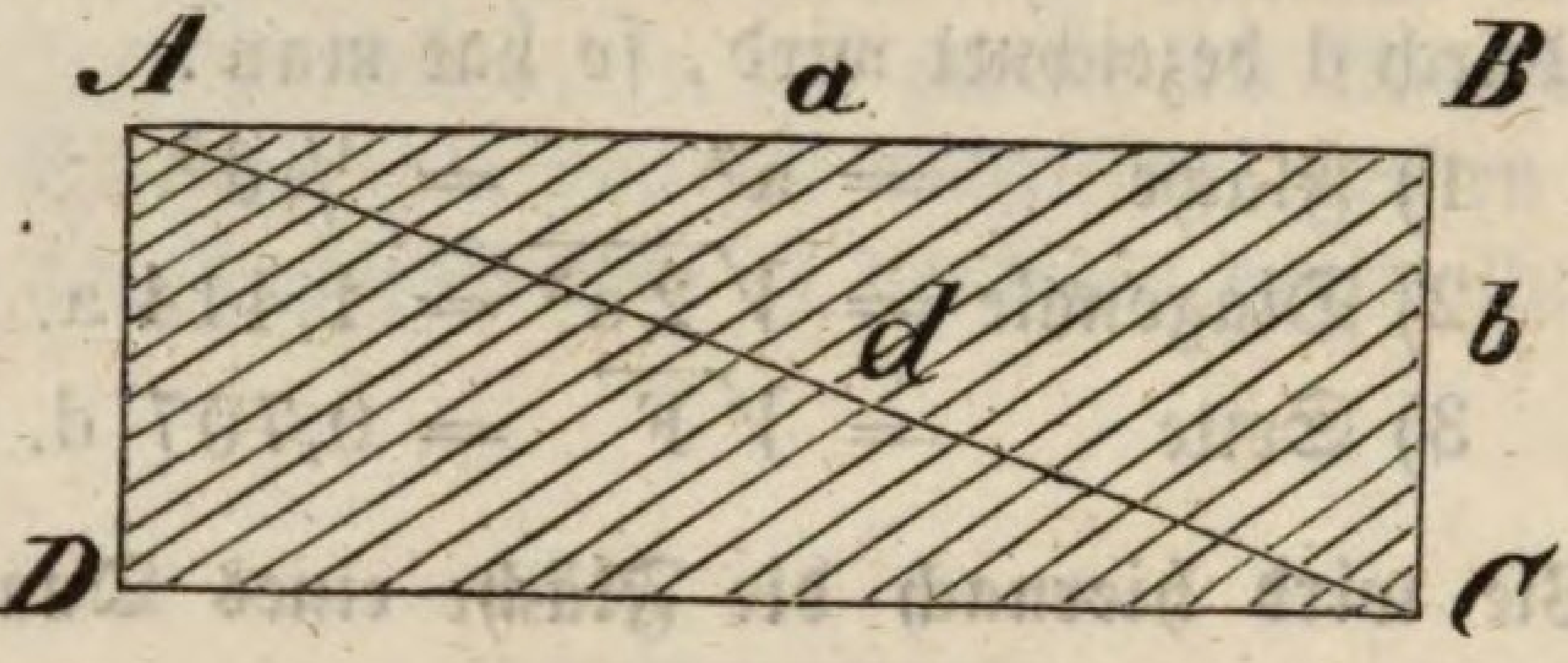


Fig. 3.

53. Was für Formeln dienen vorzüglich zur Berechnung des Rechtecks?

Nennt man zwei auf einander stehende Seiten a und b; ihr Verhältniß gegen einander m : n und die Diagonale = d, so ist:

4) Diagonale $= \sqrt{a^2 + b^2}$

5) Fläche $= ab$ oder $a \sqrt{d^2 - a^2}$

6) Fläche $= \dfrac{d^2 mn}{m^2 + n^2}$.

54. Die Seiten a und b eines Rechtecks messen 23,4 und 31,7 Ruthen; wie groß ist die Diagonale?

Die Quadrate der Seiten sind 547,56 und 1004,84 □Ruthen; deren Summe ist 1552,45 und die Quadratwurzel hieraus = 39,401 Ruthen als gesuchte Diagonale.

55. Die Seiten a und b eines Rechtecks messen 13,7 und 10 Ellen; in einem andern ist die Seite = 12 und die Diagonale = 17 Ellen: wie groß sind die Flächen dieser Figuren?

Die erste enthält $13{,}7 \times 10 = 137$ □Ellen. — Die Fläche des andern ist nach der zweiten Formel unter Nr. 5 (Fr. 53) $= 12 \times \sqrt{17^2 - 12^2} = 12 \sqrt{289 - 144} = 12 \sqrt{145} = 12 \times 12{,}0416 = 144{,}4992$ Quadratellen.

56. In einem anderen Rechteck mißt die Diagonale 21 Zoll und das Verhältniß seiner Seiten ist 3 : 2; wie groß ist die Fläche?

Nach Formel Nr. 6 hat man die Fläche

$$\frac{21^2 \times 2 \times 3}{2^2 + 3^2} = \frac{441 \times 6}{4 + 9} = \frac{2646}{13} = 203{,}54 \ \square\text{Zoll.}$$

57. Welches sind die Eigenschaften der Rhombe und der Rhomboide?

Die Rhombe Fig. 4 ist ein verschobenes Quadrat, die Rhomboide Fig. 5 ein verschobenes Rechteck. Ersteres hat also vier gleichgroße Seiten und schiefe Winkel, bei letzterem sind aber nur die gegenüberliegenden Seiten gleichgroß.

58. Auf welche Weise werden Rhombe und Rhomboide berechnet?

Nennt man die eine Seite AC Fig. 4 u. 5 = a, so wie den senkrechten Abstand von der gegenüberliegenden Seite BD = h, so ist

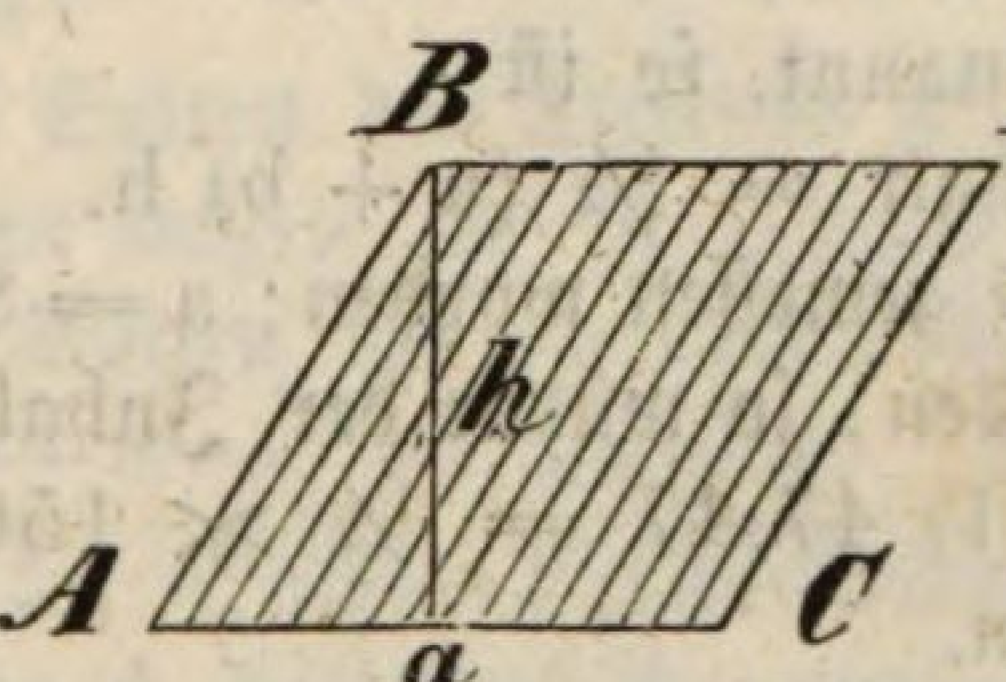


Fig. 4.

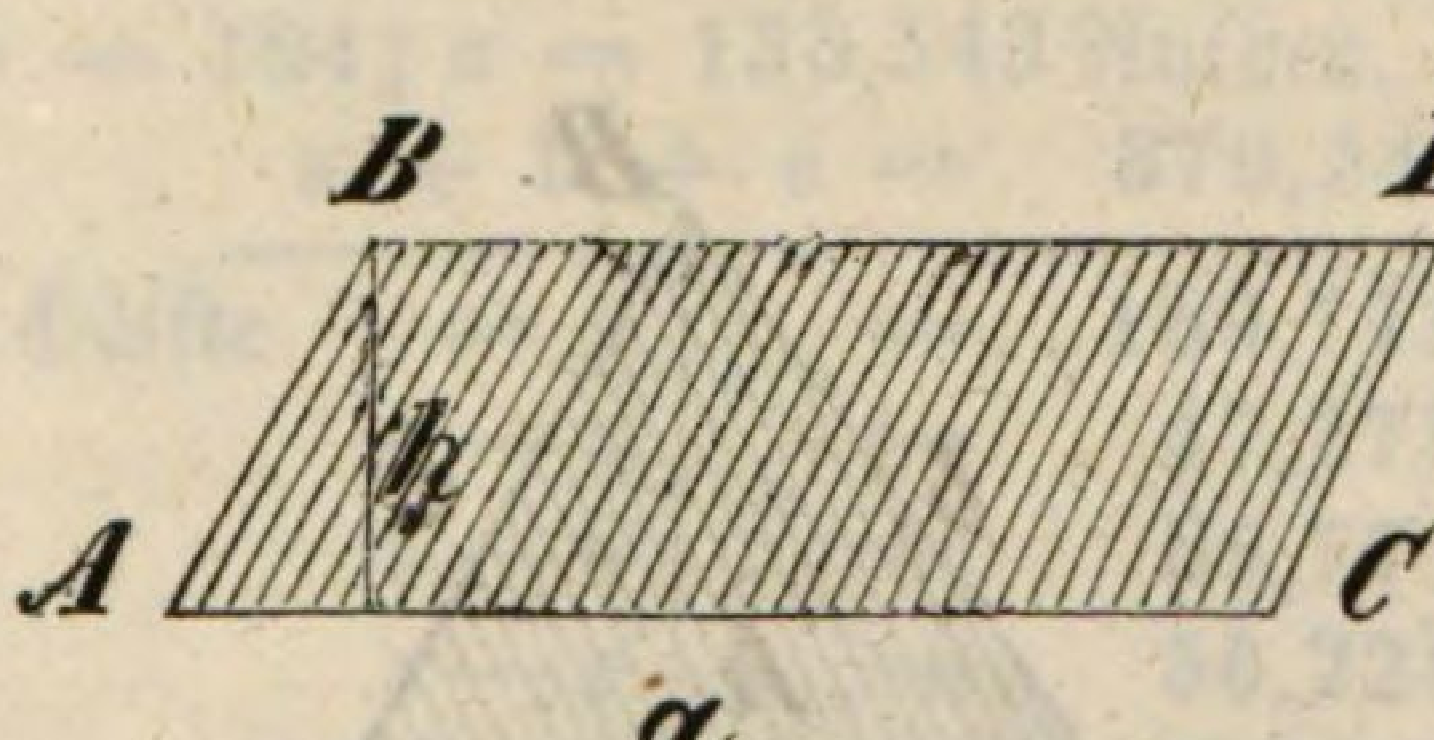


Fig. 5.

7) Inhalt = ah;

oder der Inhalt dieser Figuren wird gefunden, wenn man ihre Länge mit der senkrechten Breite multiplizirt. Ist z. B. a = 31,7 und h = 19,4, so ist der Inhalt = 31,7 × 19,4 = 614,98 □.

59. Was ist ein Paralleltrapez und wie wird seine Fläche gefunden?

Unter einem Paralleltrapez wird ein Viereck verstanden, in welchem nur zwei Seiten, wie AB und CD Fig. 6, gleich-

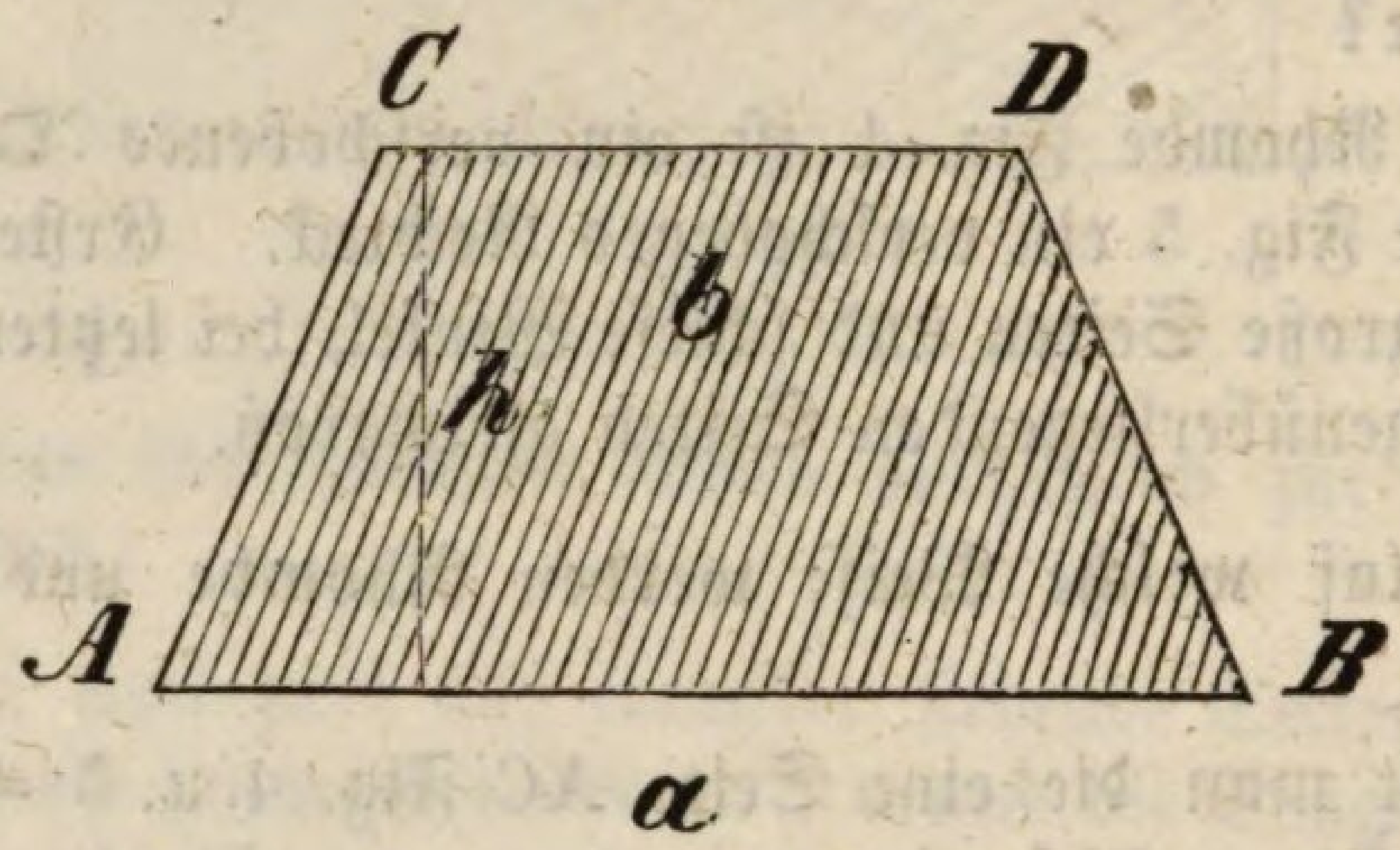


Fig. 6.

laufend sind. Werden diese parallelen Seiten a, b und ihr senkrechter Abstand h genannt, so ist

8) Inhalt = $\frac{1}{2}(a + b)\, h$.

Wäre z. B. in Fig. 6 gemessen worden: a = 81,17; b = 69,21 und h = 47,47 Ellen, so würde der Inhalt des Trapezes = $\frac{1}{2}(81{,}17 + 69{,}21)\, 47{,}47 = \frac{1}{2} \times 150{,}38 \times 47{,}47 =$ 3569,2693 □Ellen.

60. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung des Dreiecks?

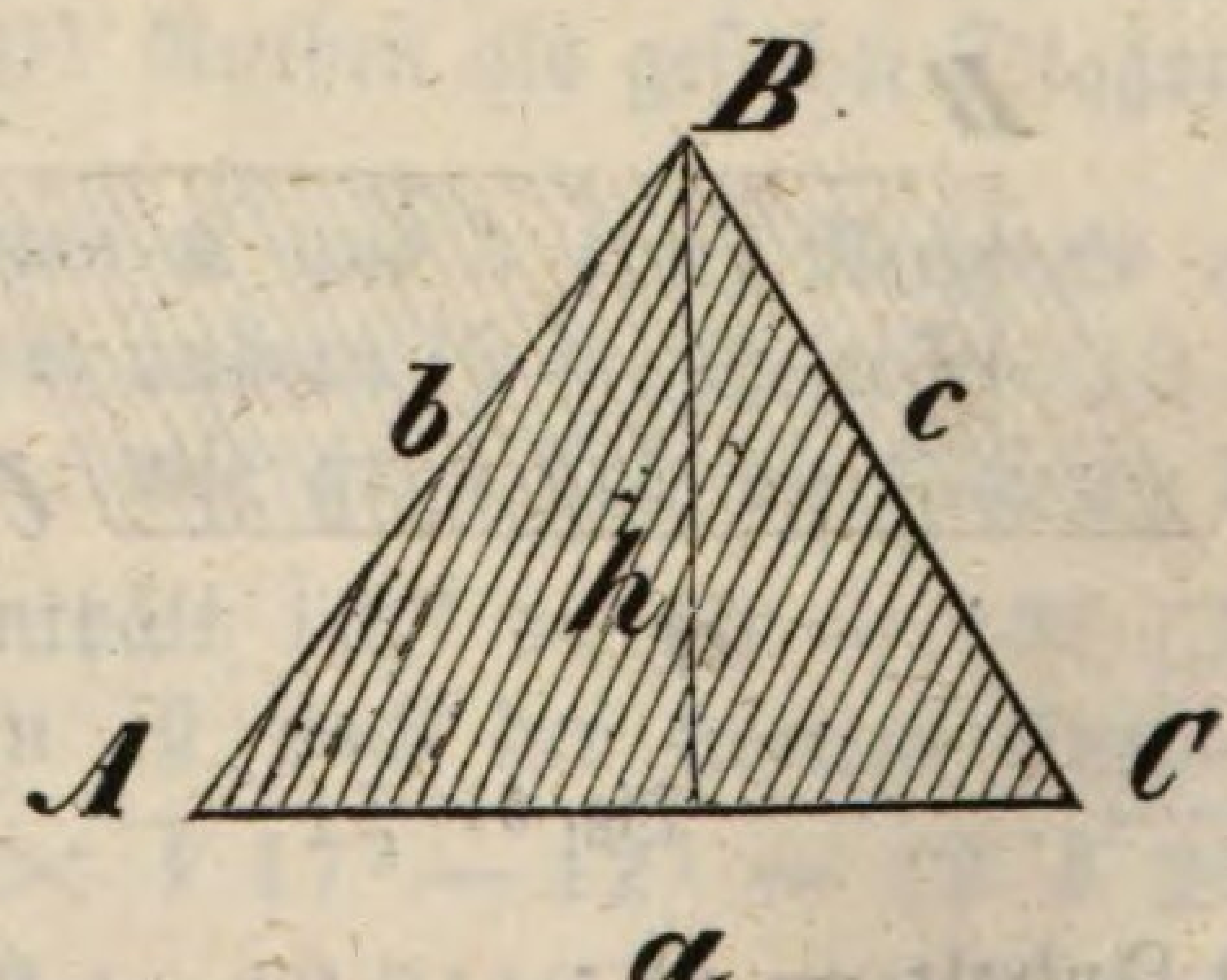


Fig. 7.

Im Dreiecke ABC Fig. 7 seien die Seiten a, b, c und die senkrechte Höhe = h. Ferner sei die halbe Summe aller drei Seiten, d. i. $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$, so ist:

9) Fläche $= \frac{1}{2}ah$.

10) Höhe $= \frac{2F}{a}$

11) Fläche $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

61. Wie ist hiernach die Fläche eines Dreiecks aus Länge und Höhe, so wie die Höhe aus Fläche und Länge zu berechnen?

Ist Länge und Höhe gegeben, so ist nach Formel 9 deren halbes Produkt die Fläche des Dreiecks. Wenn z. B. a = 21,1 Zoll und h = 17,1 Zoll mißt, so hat das Dreieck $\frac{1}{2}(21,1 \times 17,1) = 180,405$ □ Zoll Fläche. — Wird hingegen die doppelte Fläche durch die Länge dividirt, so giebt nach Formel 11 der Quotient die Höhe des Dreiecks. Hat z. B. ein Dreieck von 100 □ Zoll Fläche eine Länge von 21 Zoll, so ist dessen Breite = 200 : 21 = 9,524 Zoll.

62. Wie ist die Berechnung der Dreiecksfläche aus den drei Seiten zu vollziehen?

Wenn die drei Seiten des Dreiecks a = 142; b = 104 und c = 70 Ruthen messen, so ist (Frage 60 Formel 11) die halbe Summe der Seiten (s) = 158; ferner s — a = 16; s — b = 54; s — c = 88 Ruthen. Die Fläche ist also $= \sqrt{158 \times 16 \times 54 \times 88} = \sqrt{12113056}$ oder 3465,985 Quadratruthen. Durch Hilfe der Logarithmen wird diese Rechnung sehr vereinfacht, wie folgendes Beispiel zeigt. Es sei a = 142; b = 104; c = 133,543 Ruthen. Man hat also:

	a + b + c	=	379,543
Hälfte	= s	=	189,7715
	s — a	=	47,7715
	s — b	=	85,7715
	s — c	=	56,2285
	log. s	=	2,2782310
	„ (s—a)	=	1,6791689
	„ (s—b)	=	1,9333430
	„ (s—c)	=	1,7499565
	Summa	=	7,6406994
Hälfte	= log. F	=	3,8203497
	Fläche	=	6612,26 □ Ruthen.

63. Was ist ein Trapez und wie wird seine Berechnung vollzogen?

Ein Trapez ist ein unregelmäßiges Viereck, in welchem weder Seiten noch Winkel ein gegenseitiges, bestimmtes Verhältniß haben, ABCD Fig. 8. Weil jedes Trapez durch die Diagonale in zwei Dreiecke zerfällt, so wird es auch auf diese Weise

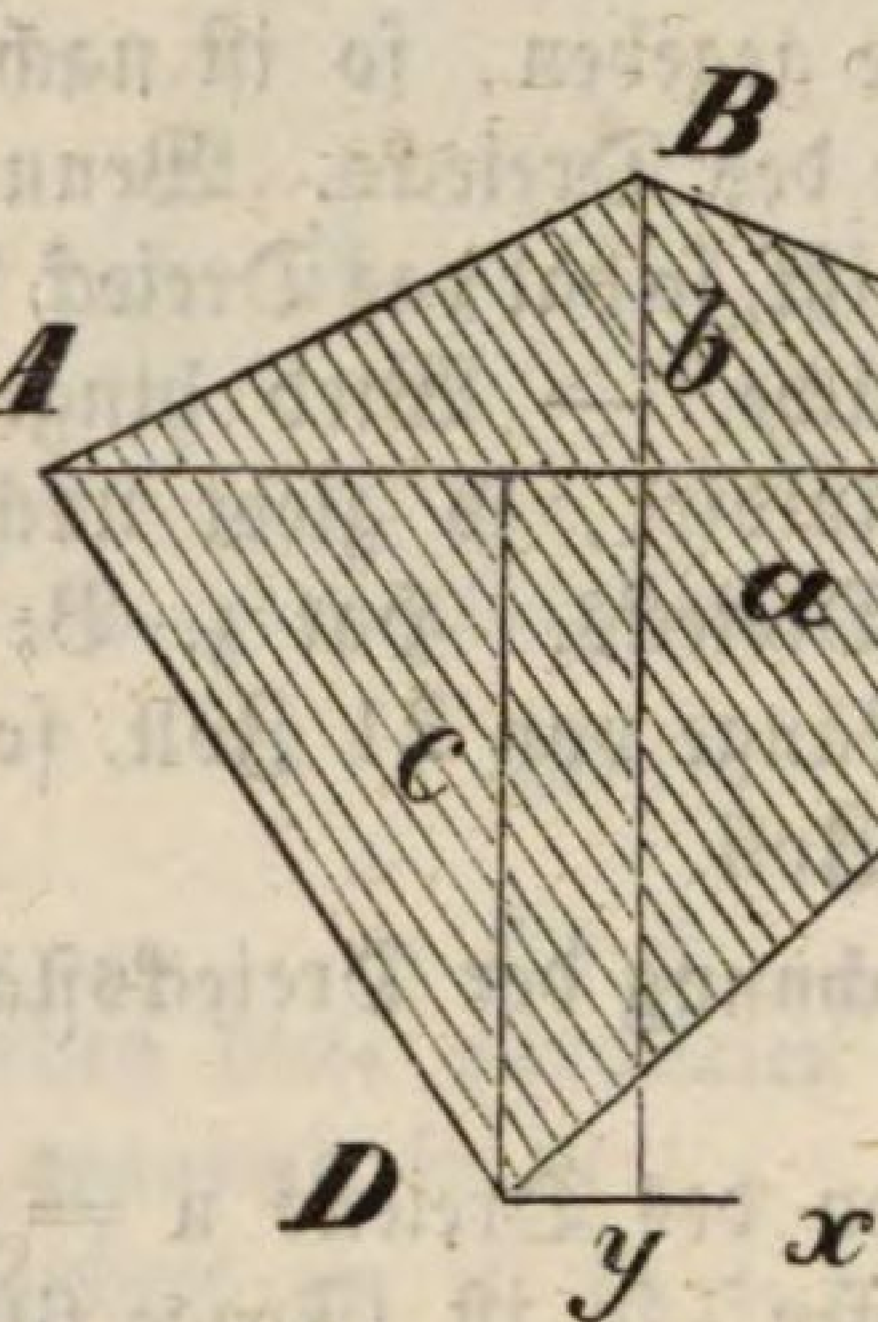


Fig. 8.

berechnet. Nennt man in Fig. 8 die gemeinschaftliche Länge AC der zwei Dreiecke ABC, ACD = a und deren Breiten = b, c, so ist

$$12)\ \text{Fläche} = \tfrac{1}{2}\, a\, (b + c).$$

Hätte z. B. a = 11,4; b = 17,3 und c = 8,7 Ellen Länge, so faßte das Trapez 7,2 × (17,3 + 8,7) = 7,2 × 26 = 187,4 □ Ellen. Etwas vereinfacht wird die Berechnung, wenn man zur Diagonale AC die Parallele Dx zieht und die darauf Senkrechte By (= b + c) mißt, weil hier der Inhalt = ½ AC × By wird.

64. Welche Eigenschaften hat ein regelmäßiges Vieleck?

Es hat gleichgroße Seiten und gleiche Winkel und eine Kreislinie um dasselbe berührt seine sämmtlichen Spitzen; eine Kreislinie in demselben aber seine sämmtlichen Seiten. Das Sechseck Fig. 9 ist ein Beispiel.

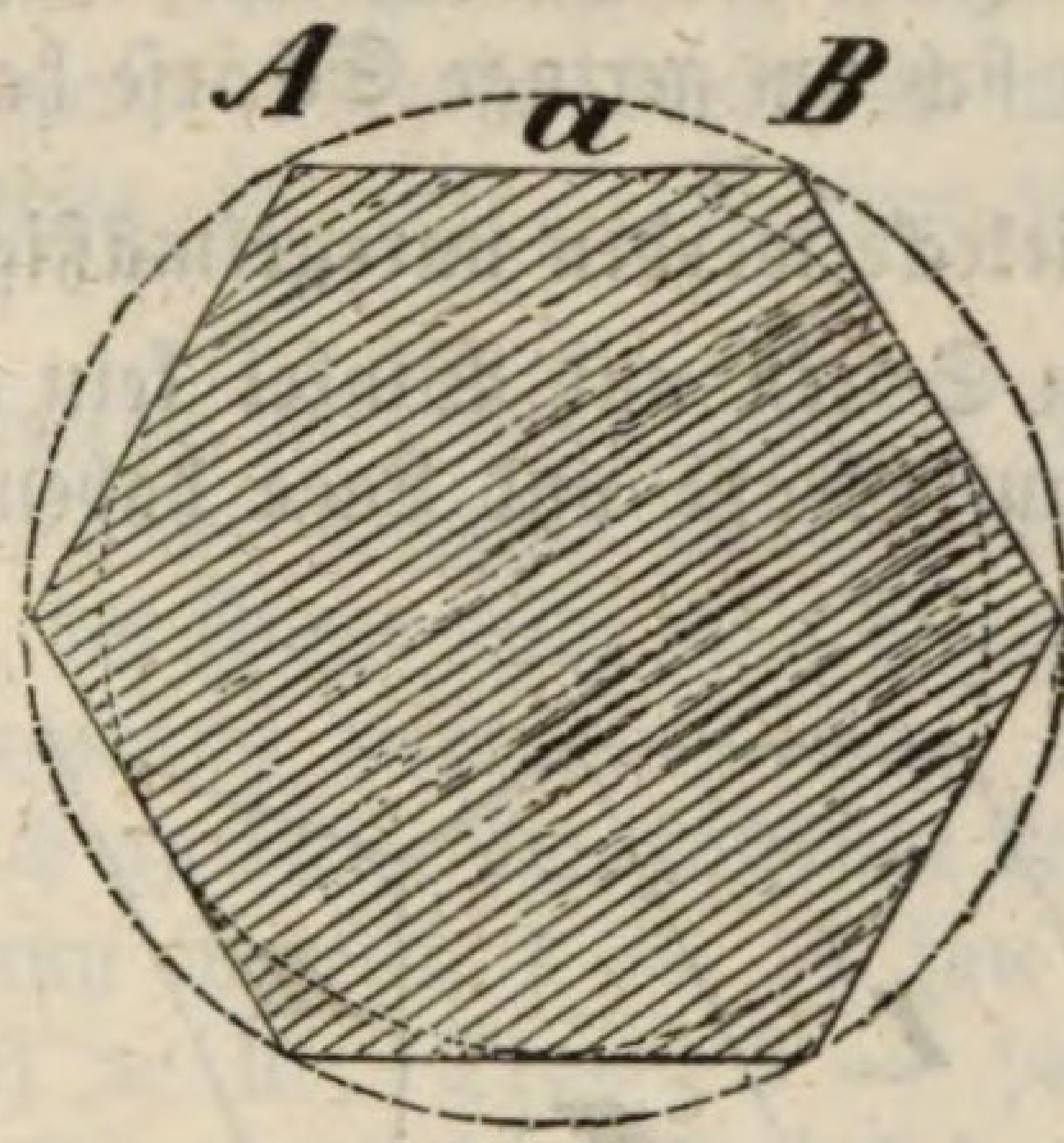


Fig. 9.

65. **Wie wird die Fläche eines regelmäßigen Vielecks berechnet?**

Es kann durch Diagonalen in Dreiecke und Trapeze zerlegt und nach diesen berechnet werden; schneller geschieht dieß aber durch Hilfe der nachstehenden Tabelle.

Tafel zur leichten Bestimmung des Flächeninhaltes regelmäßiger Vielecke.

	Fläche $= a^2$ mal:			Fläche $= a^2$ mal:	
Dreieck . . .	0,433	13/30	Achteck . . .	4,828	4,8
Viereck . . .	1	1	Neuneck . . .	6,18	19/3
Fünfeck . . .	1,72	7/4	Zehneck . . .	7,69	7,7
Sechseck . . .	2,598	2,6	Elfeck . . .	9,36	9,4
Siebeneck . .	3,63	11/3	Zwölfeck . .	11,196	11,2

66. **Auf welche Weise ist vorstehende Tafel zu gebrauchen?**

Wird die Seite eines Vielecks, z. B. AB Fig. 9, $= a$ genannt, so ist der Inhalt $= a^2 \times$ der in der Tabelle stehenden Zahl. Hat hiernach die Seite eines Fünfecks 21,3 Fuß, so ist seine Fläche $21{,}3 \times 21{,}3 \times 1{,}72 = 780{,}3468$ oder, nach der zweiten Zahlenspalte, annähernd $= 21{,}3 \times 21{,}3 \times 7/4$ $= 793{,}96$ □ Fuß. Es leuchtet aus diesem Zahlenbeispiele ein,

daß die annähernde Zahl der Tabelle nur in Fällen angewendet werden darf, wo es sich um geringe Schärfe handelt.

67. Welche Vielecke werden unregelmäßig genannt?

Solche, deren Seiten und Winkel kein gegenseitiges Verhältniß in Bezug auf Größe und Lage haben, wie in Fig. 10 und 11.

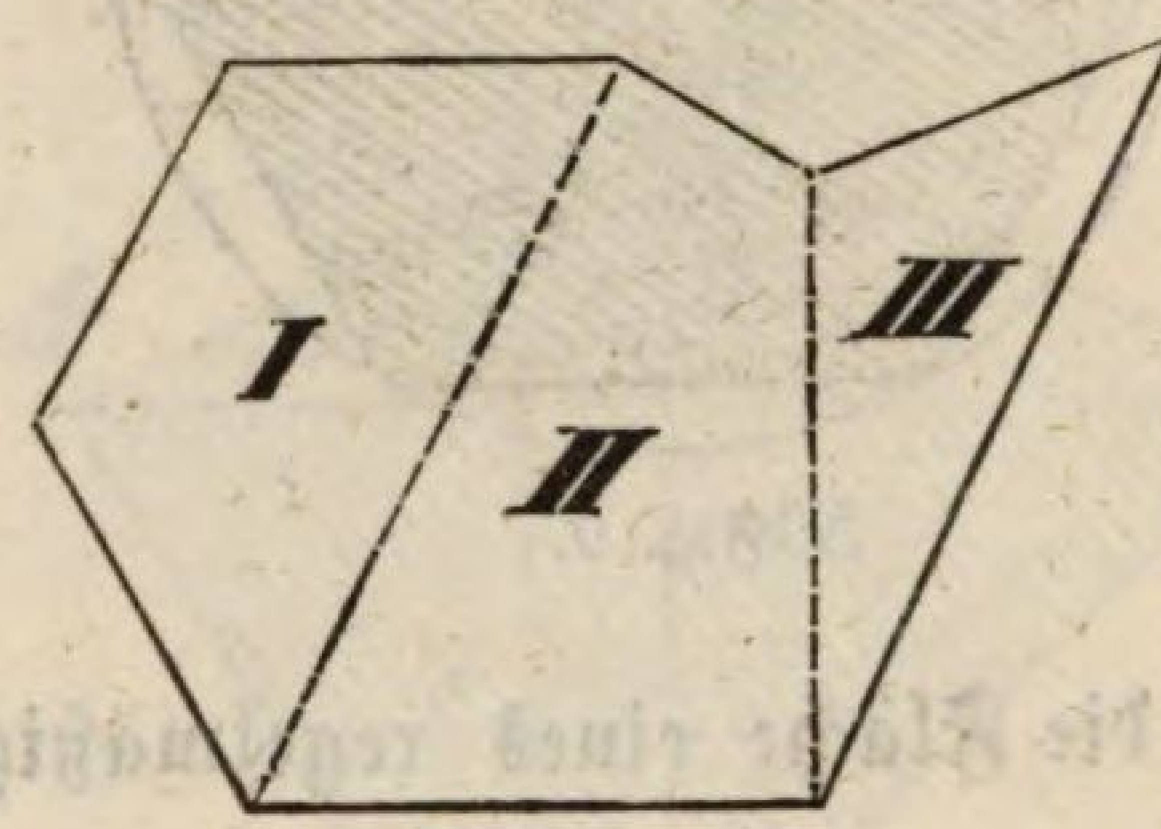


Fig. 10.

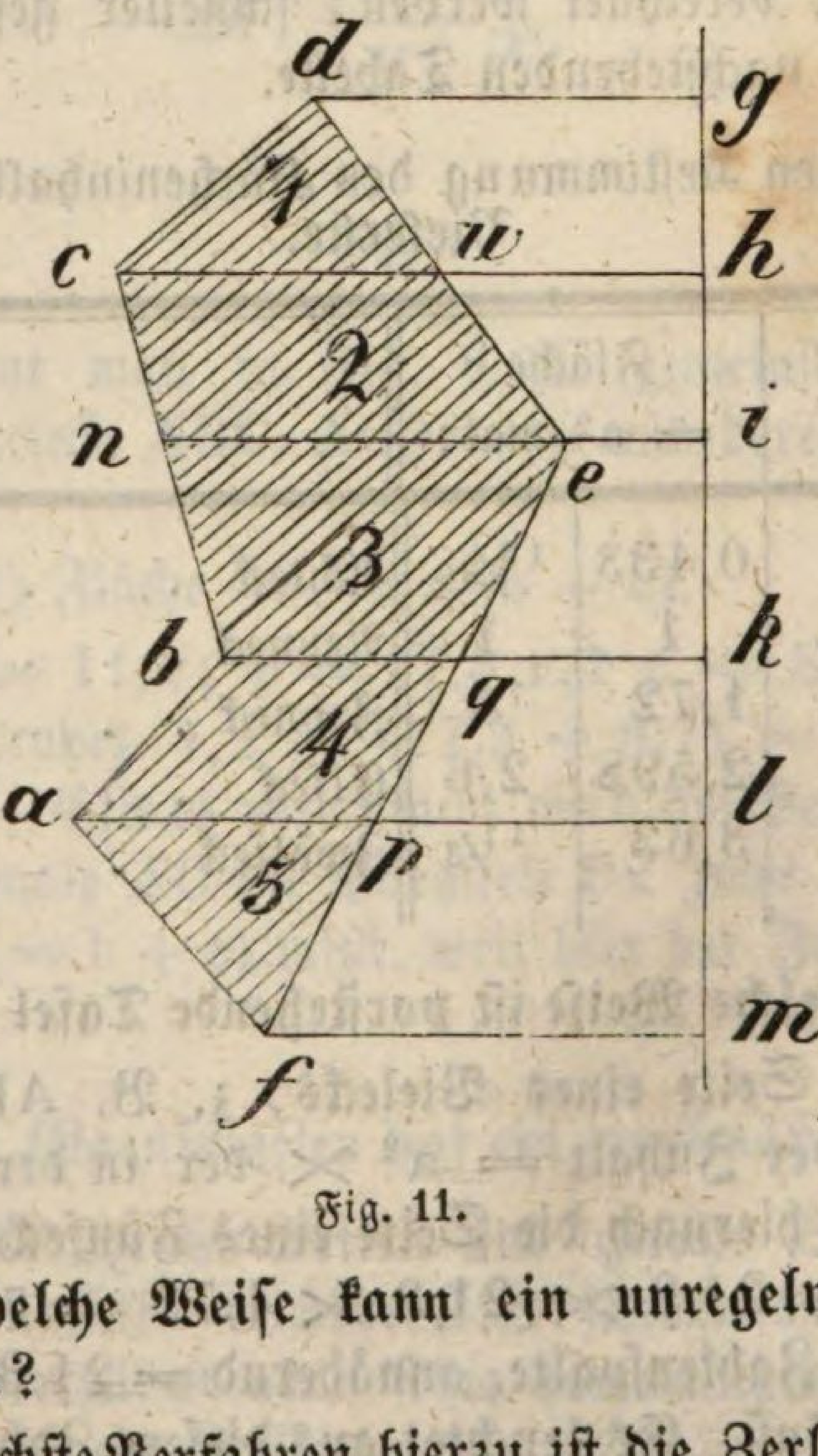


Fig. 11.

68. Auf welche Weise kann ein unregelmäßiges Vieleck berechnet werden?

Das einfachste Verfahren hierzu ist die Zerlegung des Viel-

ecks in Trapeze und Dreiecke, wie z. B. in Fig. 10. Werden die erhaltenen Figuren einzeln berechnet und die gefundenen Spezialinhalte addirt, so giebt die Summe die Fläche der ganzen Figur.

Durch Zerlegung in Paralleltrapeze läßt sich der Inhalt des Vielecks Fig. 11 auf folgende Weise finden: Durch alle Eckpunkte a, b, c ... der Figur ziehe man Parallelen dg, ch u. s. f. Auf deren Verlängerung ziehe man ferner eine senkrechte Linie gm, so werden sich an dieser die Abstände der Parallelen messen lassen. Es ist nun Dreieck 1 = ½ (cu × gh); Trapez 2 = ½ (cu + ne) × hi; Trapez 3 = ½ (ne + bq) × ik; Trapez 4 = ½ (bq + ap) kl; Dreieck 5 = ½ (ap × lm).*)

69. Was ist eine Kreislinie und welches sind die wichtigsten Benennungen bei derselben?

Ein Kreis ist eine regelmäßig gekrümmte geschlossene Linie Fig. 12, die in allen ihren Punkten gleich weit von einem von ihr umschlossenen Punkte entfernt ist. Dieser Punkt D heißt Centrum oder Mittelpunkt; die Kreislinie selbst Umfang oder Peripherie; die durch's Centrum gehende Gerade AB Durchmesser; DC ist ein Halbmesser oder Radius; EF eine Sehne und EHF ein Kreisbogen.

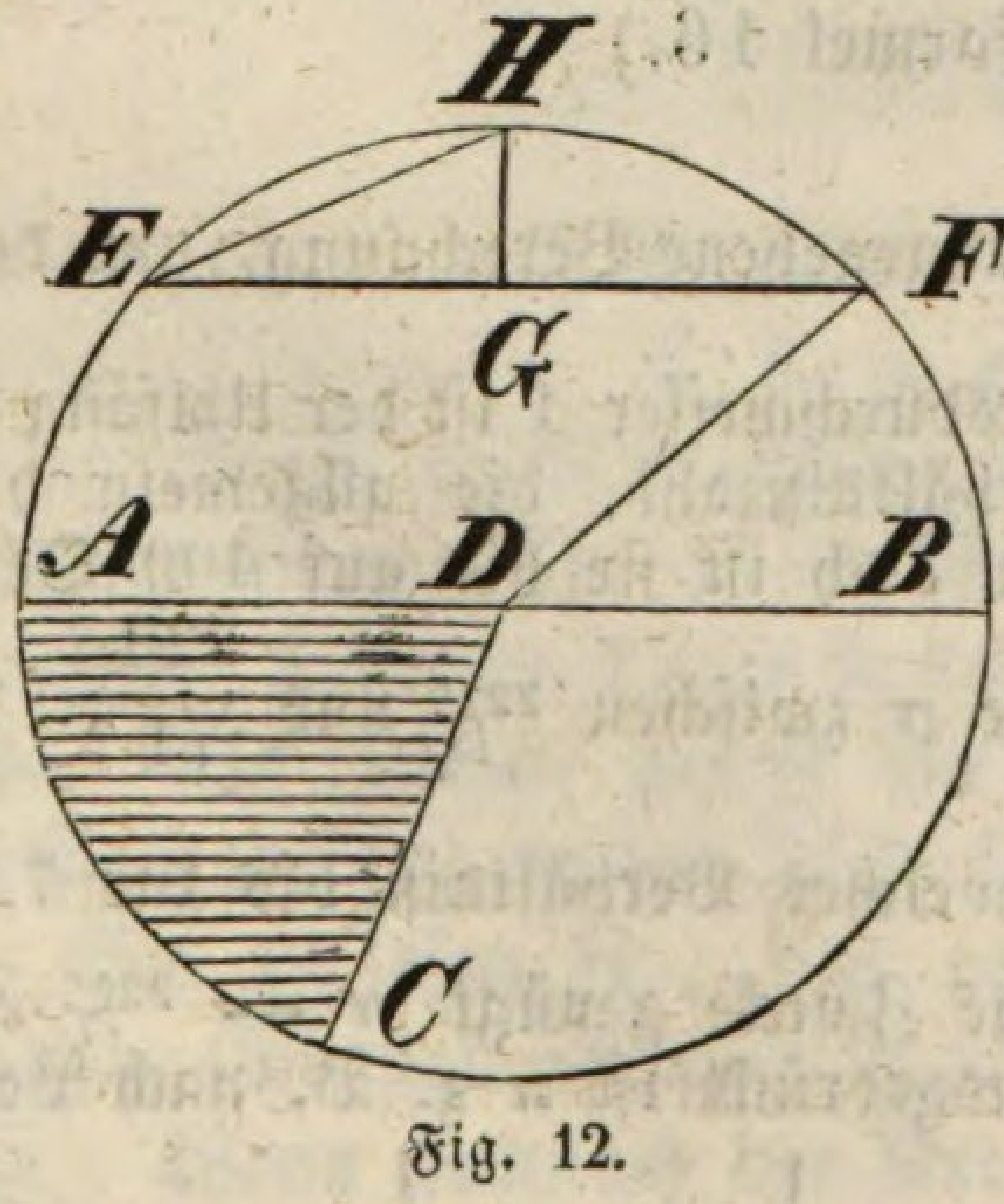


Fig. 12.

70. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung der Kreislinie?

---

*) Zur Berechnung derartiger Vielecke giebt es noch eine allgemeine Formel — Trapezialformel —, welche jedoch weitläufiger

Es bezeichne in Fig. 12 : d den Durchmesser AB; r den Halbmesser AD; p den Umfang des Kreises, so ist:

13) Peripherie $= 3{,}141592 \,.\, d$ oder nahe $= {}^{22}/_{7}$ d.*)
14) Peripherie $= 2r \,.\, {}^{22}/_{7} = {}^{44}/_{7} \,.\, r$.
15) Durchmesser $= 0{,}31831 \,..\, p = {}^{7}/_{22}$ p.
16) Halbmesser $= 0{,}15915 \,...\, p = {}^{7}/_{44}$ p.

71. Der Durchmesser eines Kreises ist 31,17 Zoll; wie groß ist seine Peripherie?

Nach Formel 13 wird die Peripherie gefunden, wenn man den Durchmesser ${}^{22}/_{7}$ mal nimmt. Für obige Aufgabe ist also der Umfang $= 31{,}17 \times {}^{22}/_{7}$ oder 97,96 □Fuß. Für den Halbmesser 16,9 Zoll ist nach Formel 14 der Umfang $= \frac{44}{7} \times 16{,}9 = 106{,}23$ □ Zoll.

72. In einem Kreise ist der Umfang gegeben: wie kann daraus Durchmesser und Halbmesser gefunden werden?

Nach Formel 15 wird der Durchmesser gefunden, wenn man den Umfang durch 0,31831 oder durch ${}^{7}/_{22}$ multiplizirt. Der Halbmesser findet sich entweder als halber Durchmesser, oder unmittelbar durch Multiplication des Umfangs mit 0,15915, d. i. nahe ${}^{7}/_{44}$. (Formel 16.)

---

ist, als wie die hier angegebene Berechnung, und deshalb nicht weiter berührt wurde.

*) Für den Kreisdurchmesser 1 ist der Umfang nahe 3,141592 ... Genau ist diese Verhältnißzahl, die allgemein durch π bezeichnet wird, nicht zu finden, doch ist sie bis auf 400 Dezimalen berechnet. Archimedes bestimmte π zwischen ${}^{22}/_{7}$ und $\frac{223}{71}$; Metius giebt als Näherung $\frac{355}{113}$ an, welches Verhältniß bis zur 7. Dezimale richtig ist. Für gewöhnliche Zwecke genügt $\pi = {}^{22}/_{7}$ oder 3,14. Durch unendliche Reihen ausgedrückt ist π z. B. nach Leibnitz:

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{2.4.5} - \frac{1}{2.4.6.7} - \frac{1}{2.4.6.8.9} \text{ rc.}\right)$$

oder, schneller zusammenlaufend:

$$\pi = 6\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1.1.}{1.2.3.2^3} + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5.2^5} \text{ rc.}\right]$$

73. Angenommen, es sei der Umfang eines Kreises = 21412 Ellen; wie berechnet sich hiernach Durchmesser und Radius?

a) Der Durchmesser ist 21412 × 0,31831

```
   64236
   21412
   171296
     64236
      21412
6815,65372
```

oder auch $\frac{21412 \times 7/22}{}$

```
   149884
2) 74942
11) 6813 Ellen, näherungsweise.
```

b) Der Halbmesser ist 21412 × 0,15915

```
 107060
 192708
   21412
   107060
3407,71980 Ellen.
```

74. Auf welche Weise wird die Kreislinie eingetheilt?

Jede Kreislinie (Umfang), sie sei so groß oder so klein sie wolle, wird in der Regel in 360 gleiche Theile — Grade — zerlegt gedacht; jeder Grad weiter in 60 Minuten und jede Minute in 60 Secunden. Kleinere Theile drückt man in Dezimalen der Secunde aus. Als Zeichen gelten für Grad (°), für Minute (′) und für Secunde (″), so daß 31° 17′ 42,7″ = 31 Grad 17 Min. 42 7/10 Sec. zu lesen ist. Die reine Dezimaltheilung des Kreisquadranten (Viertelumfangs) ist nicht allgemein in Gebrauch gekommen. Wenn demnach der Kreisbogen BF Fig. 12 genau 1/7 des ganzen Umfangs wäre, so würde sein Gradmaß $\frac{360}{7} = 51^0\ 25'\ 42{,}8''$ sein, und dieses Gradmaß legt man auch dem, den Bogen BF abschneidenden Winkel BDF bei.

75. Welches sind die wichtigsten Formeln für den Kreisbogen?

Wird in Fig. 12 der Durchmesser AB = d; die Anzahl der Grade des Bogens EHF = n; die Länge dieses Bogens = l und der Halbmesser AD = r genannt, so ist:

17) Länge des Bogens $= 0{,}0087\,..\,nd;$

18) Anzahl seiner Grade $= 114{,}5915\ldots\frac{l}{d};$

19) Durchmesser des Kreises $= 114{,}5915\ldots\frac{l}{n};$

20) Länge des Bogens $= 0{,}01745\ldots nr;$

21) Grade desselben $= 57{,}2957\ldots\frac{l}{r};$

22) Halbmesser $= 57{,}2957\ldots\frac{l}{n}.$

76. Gegeben sind der Durchmesser eines Kreises und die Anzahl der Grade eines Kreisbogens: wie wird die Länge dieses Bogens gefunden?

Nach Formel 17 dadurch, daß man den Durchmesser durch die Gradzahl und das Produkt durch 0,0087 multiplizirt. Sei z. B. Durchmesser = 17,4 Ellen und der Bogen enthalte $40^0 17'$, so ist zunächst $40^0 17' = 40^{17}/_{60} = 40{,}283^0$ und sodann die Länge des Bogens $40{,}283 \times 17{,}4 \times 0{,}0087 = 6{,}098$ Ellen.

77. Gegeben sind Durchmesser des Kreises und Länge eines Bogens: wie viel Grade enthält dieser?

Nach Formel 18 wird die Größe des Bogens nach Graden gefunden, wenn man seine Länge durch den Durchmesser des ganzen Kreises dividirt und den Quotienten durch 114,59 . . . multiplizirt. Wäre z. B. der Kreisdurchmesser = 10 und die Länge eines Kreisbogens = 2 Fuß, so mißt dieser Bogen $\frac{2}{10} \times 114{,}59 = 22{,}92$ Grad $= 22^0 55{,}2'$.

78. **Gegeben ist die Länge und das Gradmaß eines Bogens, gesucht wird der Durchmesser des dazu gehörenden Kreises: wie ist die Berechnung auszuführen?**

Nach Formel 19 wird der Kreisdurchmesser gefunden, wenn man die Länge des abgeschnittenen Bogens durch sein Gradmaß dividirt und den Quotienten durch 114,59 multiplizirt. Wäre z. B. der Bogen 21 Zoll lang und mäße $33^0 16'$ ($33,27^0$), so mäße der Durchmesser seines Kreises ($21 \times 114,59$) div. durch $33,27 = \frac{21}{33,27} \times 114,59 = \frac{7}{11,09} \times 114,59 = \frac{802,13}{11,09}$ $= 72,33$ Zoll.

79. **Gegeben sind Halbmesser eines Kreises und Gradzahl eines Kreisbogens, wie ist die Länge dieses Bogens zu berechnen?**

Nach Formel 20 wird die gesuchte Länge gefunden, wenn man den Kreisradius durch die Gradzahl des Bogens und das Produkt durch 0,01745 multiplizirt. Sei z. B. der Radius = 14 Fuß und das Maß des Bogens = $43^0 17' 45'' = 43,296$ Grad, so ist der Bogen = $43,296 \times 14 \times 0,01745$ = 10,5772128 Fuß lang.

80. **Gegeben sind Halbmesser eines Kreises und Länge eines Bogens auf demselben; wie wird die Gradzahl dieses Bogens berechnet?**

Nach Formel 21 dadurch, daß man die Länge des Bogens durch den Kreisradius dividirt und den Quotient durch 57,2957 oder nahe 57,3 multiplizirt. Ist z. B. Radius = 42 Ellen; Länge des Bogens = 14,3 Ellen, so ist 42 in 14,3 = 0,34 und sodann $0,34 \times 57,3 = 19,482^0 = 19^0 28' 55,2''$ das gesuchte Gradmaß.

81. **Gegeben sind Länge und Gradmaß eines Kreisbogens; wie läßt sich der Halbmesser des dazu gehörigen Kreises daraus berechnen?**

Nach Formel 22 dadurch, daß man mit dem Gradmaß des Bogens in seine Länge dividirt und den Quotus durch 57,3 multiplizirt. Faßt z. B. der Bogen $26,4^0$ und mißt er 31,7 Zoll,

so ist zunächst $31,7 : 26,4 = 1,2$ ganz nahe; ferner $1,2 \times 57,3 = 68,76$ Zoll der gesuchte Kreisradius.

82. Was ist ein Kreisausschnitt und welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung desselben?

Unter einem Kreisausschnitte versteht man ein durch einen Bogen AC und zwei Halbmesser AD, CD Fig. 12 begrenztes Stück der ganzen Kreisfläche. Nennt man den Durchmesser AB des Kreises = d, den Halbmesser AD = r, die Gradzahl des Bogens AC = n und die Fläche des Ausschnittes (Sectors) = F, so ist:

23) Sectorfläche $= 0,00218\ nd^2$

24) Sectorfläche $= 0,00873\ nr^2$

25) Durchmesser $= 21,409 \sqrt{\frac{F}{n}}$.

26) Halbmesser $= 10,705 \sqrt{\frac{F}{n}}$.

27) Grade des Bogens $= 458,367\ \frac{F}{d^2}$.

28) Grade des Bogens $= 114,592\ \frac{F}{r^2}$.

83. Es sind gegeben der Durchmesser eines Kreises und das Gradmaß eines Sectors; wie wird die Sectorfläche berechnet?

Die gesuchte Fläche wird nach Formel 23 dadurch gefunden, daß man das Gradmaß des Sectors durch das Quadrat des Kreisdurchmessers und das Produkt durch 0,00218 multiplizirt. Faßt z. B. der Ausschnitt 40^0 und ist der Kreisdurchmesser 10 Ellen, so hat der Sector $0,00218 \times 40 \times 10 \times 10 = 8,72$ □Ellen.

84. Aus dem Halbmesser eines Kreises und der Gradzahl eines dazu gehörenden Sectors soll die Fläche des letzteren gefunden werden; wie wird gerechnet?

Nach Formel 24 wird die Gradzahl durch das Quadrat des Halbmessers und das Produkt durch 0,00873 multiplizirt.

Ist z. B. der Radius 6 Ellen und mißt der Bogen 50 Grad, so hat der Ausschnitt $0{,}00873 \times 50 \times 6 \times 6 = 15{,}714$ □ Ellen.

85. **Aus der Fläche eines Kreissectors und seinem Gradmaße soll der Durchmesser des dazu gehörenden Kreises gefunden werden; wie wird verfahren?**

Das Verfahren ist nach Formel 25 wie folgt: Nachdem die Fläche des Sectors durch sein Gradmaß dividirt, wird die Quadratwurzel des Quotienten gesucht und diese durch 21,409 multiplizirt. Hat z. B. der Ausschnitt 980 □ Zoll und faßt er 20 Grad, so ist $\frac{980}{20} = 49$; $\sqrt{49} = 7$ und $21{,}409 \times 7 = 149{,}863$ Zoll, gesuchter Durchmesser.

86. **Es sind gegeben Fläche eines Kreissectors und Gradmaß desselben; gesucht wird der Halbmesser des entsprechenden Kreises oder die Seite des Sectors: wie wird gerechnet?**

Nach Ausweis der Formel 26 wird zuerst die Sectorfläche durch sein Gradmaß dividirt, aus dem Quotienten die Quadratwurzel extrahirt und diese durch 10,705 multiplizirt. Z. B. Es messe der Sector 960 □ Fuß und sein Bogen sei 15 Grad, so ist: $960 : 15 = 64$; $\sqrt{64} = 8$ und $8 \times 10{,}705 = 85{,}64$ Fuß gesuchter Radius.

87. **Es sind gegeben Fläche eines Sectors und Durchmesser seines Kreises; gesucht wird das Gradmaß des Sectors; wie ist zu rechnen?**

Nach Formel 27 wird die Sectorfläche durch das Quadrat des Kreisdurchmessers dividirt und der Quotient mit 458,376 oder nahe 458,4 multiplizirt. Z. B. Es sei Fläche = 76 □ Zoll; Durchmesser = 20 Zoll: so ist $d^2 = 20 \times 20 = 400$; $\frac{76}{400} = 0{,}19$ und $458{,}4 \times 0{,}19 = 87{,}096^0$ oder $87^0\ 5'\ 45{,}6''$ = dem gesuchten Bogenmaße.

88. **Endlich sind gegeben Fläche eines Sectors und Halbmesser des Kreises; wie wird das Bogenmaß des Sectors gefunden?**

Nach Formel 28 wird die Sectorfläche durch das Quadrat des Halbmessers dividirt und der Quotient mit 114,592 oder

nahe 114,6 multiplizirt. Für die Fläche = 100 □ Zoll und den Radius = 40 hat man 40 × 40 = 1600; 100 : 1600 = 0,0625 und 114,6 = 0,0625 = 7,16 Grad = 7°9′36″ Bogen des Sectors.

89. **Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung der Kreisfläche?**

Wird der Kreisdurchmesser AB Fig. 12 = d; der Radius AD = r; der Umfang = p und die Kreisfläche = F genannt, so ist:

29) Fläche = 0,7853 d^2 oder nahe $^{11}/_{14}\, d^2$.
30) Fläche = 3,141592 r^2 „ $^{22}/_{7}\, r^2$.
31) Fläche = 0,07959 p^2 „ 0,08 p^2.
32) Durchmesser = 1,1284 $\sqrt{F}$ „ $1\,^1/_8 \sqrt{F}$.
33) Halbmesser = 0,564 $\sqrt{F}$
34) Umfang = 3,544 $\sqrt{F}$.

90. **Der Durchmesser eines kreisrunden Pavillons ist 20 Fuß, wie groß ist seine Grundfläche?**

Die Grundfläche wird nach Formel 29 gefunden, wenn man das Quadrat des Durchmessers durch 0,785 multiplizirt; es ist also hier 20 × 20 = 400 und 400 × 0,785 = 314 Quadratfuß = der gesuchten Fläche.

91. **Der Radius einer Drehscheibe mißt 12 Ellen; wie groß ist ihre Fläche?**

Dieselbe wird nach Formel 30 durch Multiplikation des Quadrats vom Radius mit $^{22}/_{7}$ annähernd gefunden. Es ist aber 12 × 12 = 144 und 144 = $^{22}/_{7}$ = 452,5 □ Ellen = der gesuchten Grundfläche.

92. **Der Umfang eines Siebes mißt 80 Zoll; wie viel Quadratzoll Drahtgewebe sind zu dessen Bezug erforderlich?**

Nach Formel 31 wird die Fläche eines Kreises aus seinem Umfange berechnet, wenn man dessen Quadrat durch 0,08 multiplizirt. Für obige Aufgabe ist Umfang × Umfang = 80 × 80 = 6400 und 6400 × 0,08 = 51,2 □ Zoll. Dieß ist die Fläche des Siebes und so viel Drahtgewebe ist zu seinem Bezug nöthig.

93. **Die Fläche einer Scheibe soll gerade 100 Quadratellen betragen; wie groß ist ihr Durchmesser zu nehmen?**

Nach Formel 32 findet sich der gesuchte Durchmesser durch Multiplikation der Quadratwurzel aus der gegebenen Fläche mit 1,1284. Für unsere Frage ist die Fläche = 100; deren Quadratwurzel = 10 und mithin der gesuchte Durchmesser = 10 × 1,1284 = 11,284 Ellen.

94. Ein Kreis von 144 □ Zoll Fläche soll gezeichnet werden; wie groß ist sein Halbmesser zu nehmen?

Aus der Kreisfläche wird nach Frage 33 der Radius gefunden, wenn man die Quadratwurzel der Fläche durch 0,564 multiplizirt. Nun ist $\sqrt{144} = 12$, ferner $12 \times 0{,}564 = 6{,}768$ Zoll, und so groß ist der Radius eines Kreises von 144 □ Zoll Flächeninhalt.

95. Um eine Scheibe von 1,21 □ Ellen Fläche soll ein Band gelegt werden; wie lang muß es sein?

Der Umfang eines Kreises berechnet sich nach Formel 34 dadurch, daß man die Quadratwurzel der Fläche mit 3,544 multiplizirt. Für vorstehende Aufgabe ist $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$; also $1{,}1 \times 3{,}544 = 3{,}8984$ und so lang muß das gesuchte Band sein.

96. Was wird unter einem Kreisringe verstanden und welches sind die wichtigsten Formeln zu dessen Berechnung?

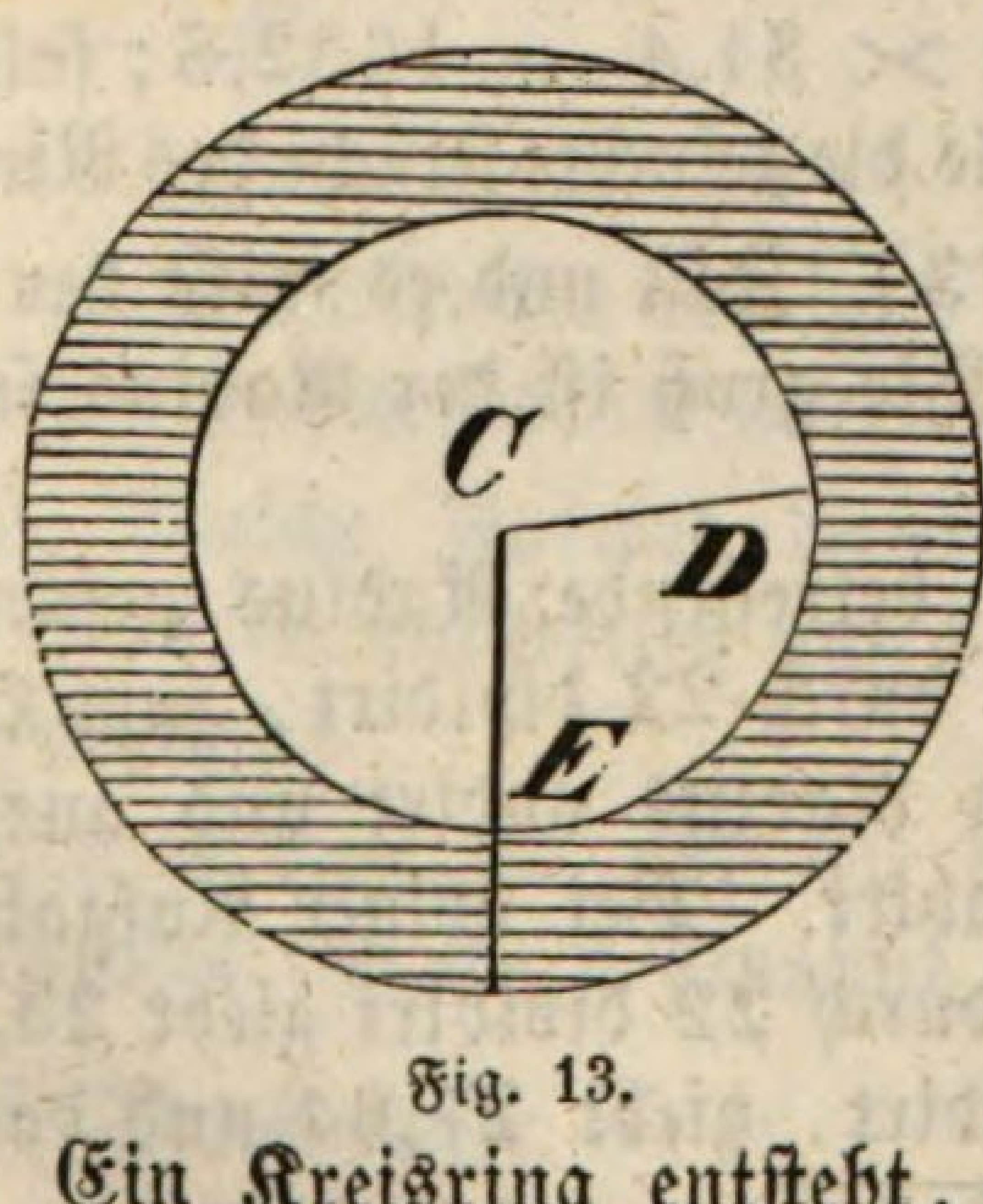


Fig. 13.

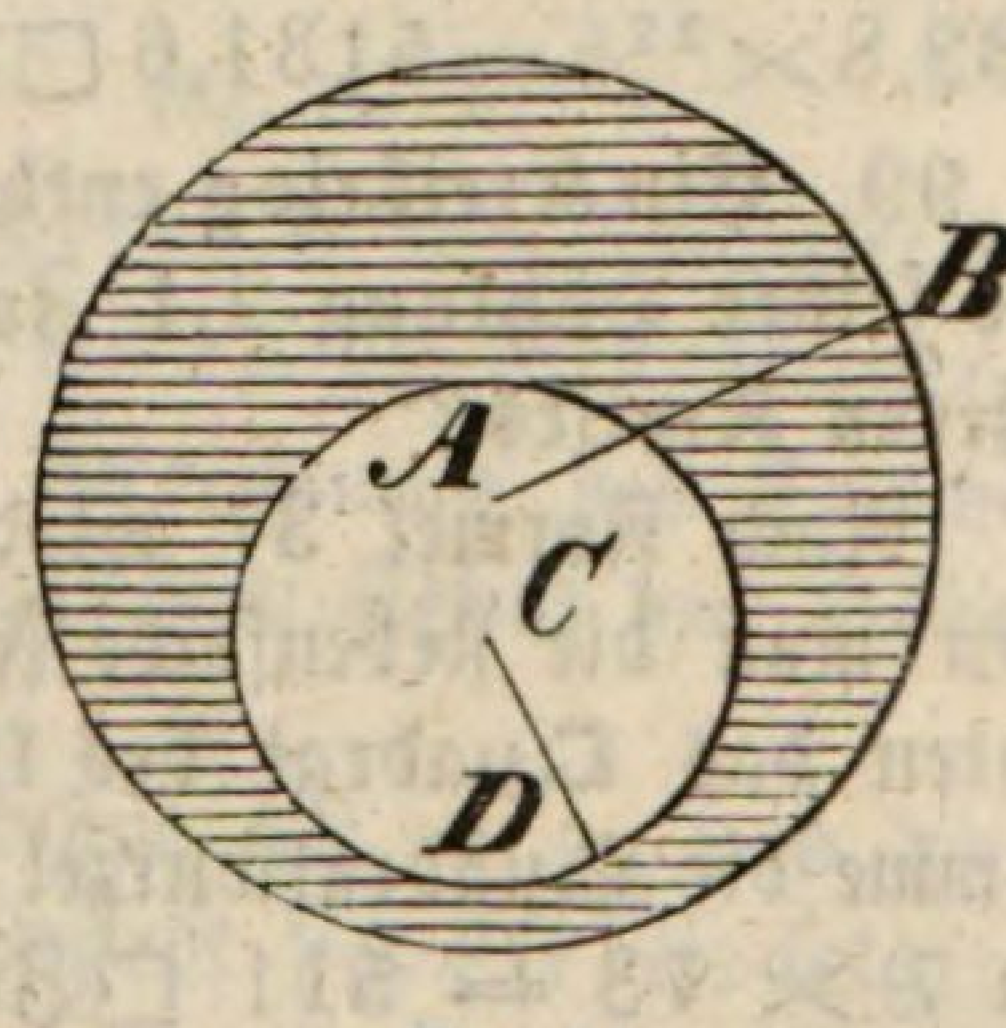


Fig. 14.

Ein Kreisring entsteht, wenn eine Kreisfläche aus einer größeren dergleichen herausgenommen wird. Fallen hierbei die Mittelpunkte beider Kreise zusammen, wie bei Fig. 13, so heißt der Ring conzentrisch, sonst aber, wie bei Fig. 14, exzentrisch. Beide werden auf gleiche Weise berechnet, und wenn

man CE, Fig. 13 oder AB, Fig. 14 = R, so wie CD Fig. 13 und 14 = r und die Ringfläche = F nennt, so ist:

35) Ringfläche $= (R^2 - r^2)\ 3{,}1416$,

36) Ringfläche $= (R + r)(R - r)\ {}^{22}/_{7}$,

37) großer Radius $= \sqrt{\frac{7F}{22} + r^2}$,

38) kleiner Radius $= \sqrt{R^2 - \frac{7F}{22}}$.

97. Der große Halbmesser (CE Fig. 13) des Querschnittes ist 7,1; der kleine (CD) hingegen 3,2 Zoll. Wie groß ist die Fläche einer Röhre?

Nach Formel 35 sind zu dieser Berechnung die Quadrate beider Halbmesser zu suchen, das kleine vom größeren abzuziehen und der Rest durch 3,1416 oder 3,142 zu multipliziren. Es ist aber 7,1 × 7,1 = 50,41; 3,2 × 3,2 = 10,24; weiter 50,41 — 10,24 = 40,17 und endlich 40,17 × 3,142 = 126,21 Quadratzoll Fläche des gegebenen Querschnittes.

98. Im Kreisringe Fig. 14 mißt AB = 41,7 und CD = 10,3 Zoll. Wie groß ist die Fläche des Ringes, nach Formel 36 berechnet?

Hier ist R = 41,7 und r = 10,3; mithin R + r = 52 und R — r = 31,4. Nun ist 52 × 31,4 = 1632,8; folglich 1632,8 × ²²/₇ = 5131,6 □Z., als die gesuchte Fläche des Ringes.

99. Ein Kreisring enthält 73 □Zoll und es mißt der Radius seiner Höhlung 2,1 Zoll. Wie groß ist der Radius seines äußeren Kreises?

Nach Formel 37 wird der betreffende Radius gefunden, wenn man die siebenfache Fläche durch 22 dividirt, zum Quotienten das Quadrat des kleinen Radius addirt und aus der Summe die Quadratwurzel extrahirt. Bei obiger Aufgabe ist nun 7 × 73 = 511 □Zoll; durch 22 dividirt giebt 23,23; hierzu 2,1 × 2,1 oder 4,41 addirt, giebt 27,64 und daraus die Quadratwurzel extrahirt $\sqrt{27{,}64} = 5{,}25$ Zoll als gesuchten großen Radius des Ringes.

100. Ein anderer Kreisring faßt 172 □Zoll und ist sein großer Radius 16,1 Zoll. Wie viel Zoll mißt der kleine Radius?

Derselbe wird nach Formel 38 auf folgende Weise berechnet. Vom Quadrate des großen Radius oder von $16,1 \times 16,1 = 259,21$ ziehe ab den 22sten Theil der siebenfachen Fläche. 7×172 ist aber 1204 und davon $^1/_{22} = 54,73$. Der Unterschied ist 204,48. Hieraus die Quadratwurzel extrahirt, giebt 14,3 Zoll für den gesuchten Radius.

101. **Was wird unter einem Kreisabschnitte (Segmente) verstanden?**

Ein Kreisabschnitt ist ein, durch eine Sehne vom ganzen Kreise getrenntes Stück der Kreisfläche. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden, indem der Abschnitt kleiner als der Halbkreis sein kann, wie in Fig. 15; oder die Größe des Halbkreises übertrifft, wie in Fig. 16. In beiden Fällen unter-

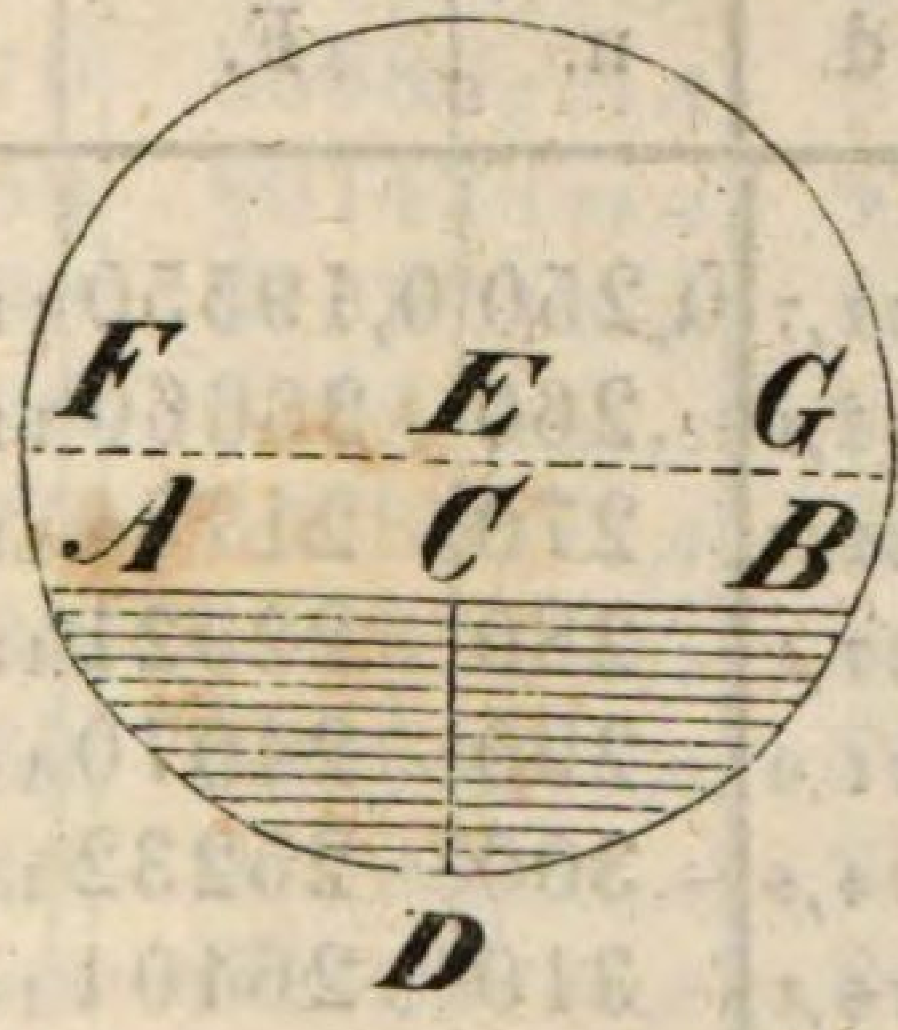


Fig. 15.

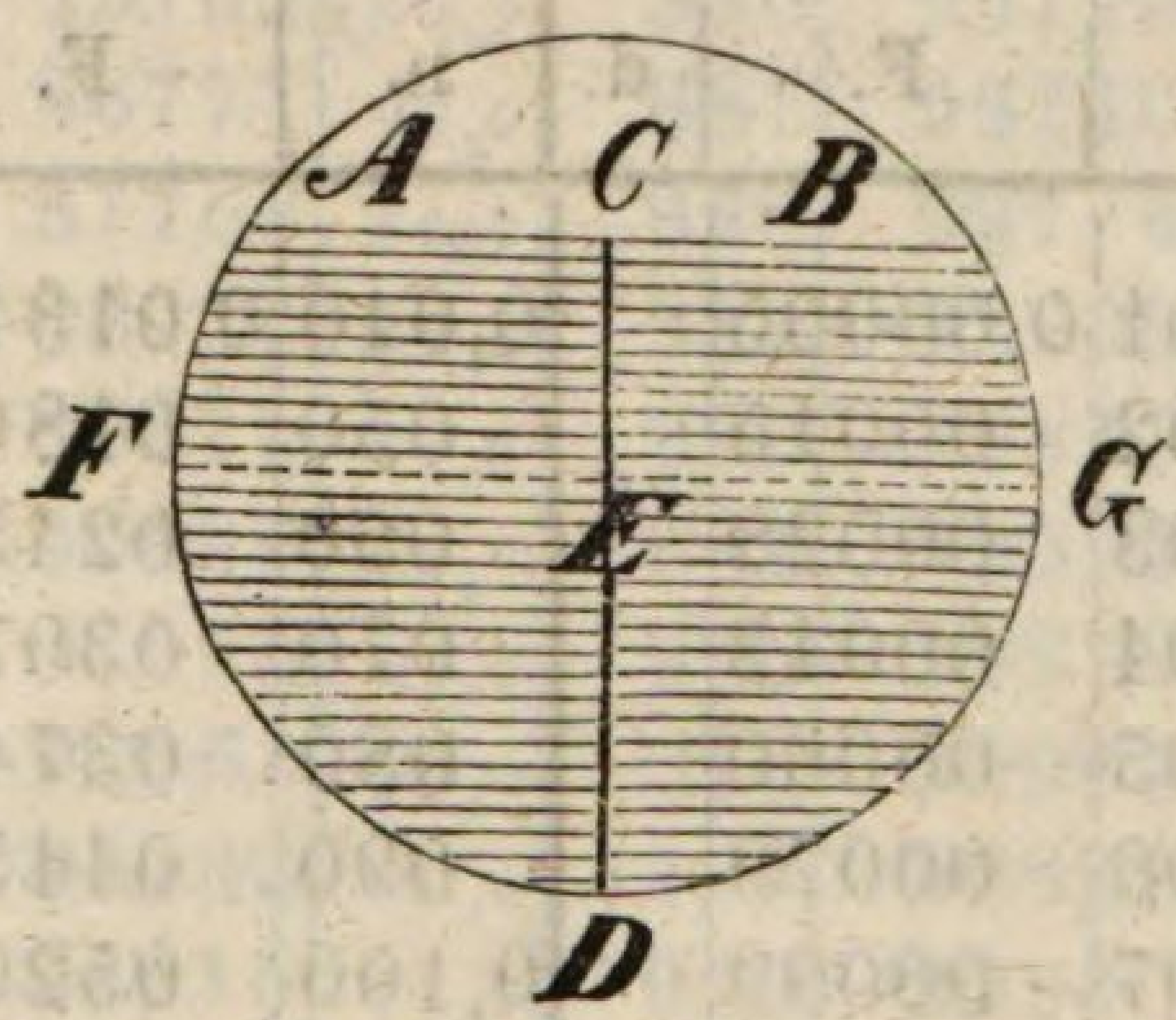


Fig. 16.

scheidet man die Sehne AB und die Höhe CD des Abschnittes, sowie den Durchmesser FG und den Radius FE des Grundkreises.

102. **Welche Formel dient zur Berechnung des Durchmessers eines Grundkreises aus der gegebenen Sehne und Höhe des Abschnittes?**

Wird in Fig. 15 und 16 die Sehne AB = s, und die Abschnittshöhe CD = h genannt, so ergiebt sich FG wie folgt:

$$39)\ \text{Durchmesser} = h + \frac{s^2}{4\,h}.$$

Wäre z. B. in Fig. 15 AB = 10 Zoll; CD = 2 Zoll, so ist der Durchmesser $FG = 2 + \frac{10^2}{4.2} = 2 + \frac{100}{8} = 14,5$ Zoll. Und mäße auf gleiche Weise in Fig. 16 AB = 6 und CD

$= 12$ Zoll, so wäre $FG = 12 + \frac{6^2}{4 \,.\, 12} = 12 + \frac{36}{48}$
$= 12{,}75$ Zoll.

103. Wie kann der Flächeninhalt eines Kreissegments berechnet werden?

Die genauen Formeln hierzu sind für die Praxis zu complizirt, also deren Auflösung zu umfänglich; die vorhandenen einfacheren Näherungsregeln geben hingegen zu wenig Zuverlässigkeit. Im Nachfolgenden soll also eine

Hilfstafel zur Berechnung der Kreisabschnitte

Platz finden und durch Gebrauchsanweisung erläutert werden.

n.	F.	d.	n.	F.	d.	n.	F.	d.
0,001	0,00005		0,040	0,01342	52,7	0,250	0,19550	111,0
002	00015		050	01869	58,1	260	20660	112,4
003	00028		060	02450	62,7	270	21784	113,7
004	00043		070	03077	67,1	280	22921	114,9
005	00060		080	03748	71,0	290	24070	116,2
006	00079		090	04458	74,6	300	25232	117,2
007	00099		0,100	05204	78,1	310	26404	118,2
008	00121		110	05985	81,2	320	27587	119,2
009	00145		120	06797	84,2	330	28779	120,2
010	00169		130	07639	87,0	340	29981	121,1
011	00195		140	08509	89,7	350	31192	121,8
012	00222		150	09406	92,2	360	32410	122,6
013	00251		160	10328	94,5	370	33636	123,3
014	00280		170	11273	96,7	380	34869	123,9
015	00310		180	12240	98,9	390	36108	124,5
016	00342		190	13229	100,9	400	37353	125,0
017	00374		200	14238	102,8	410	38603	125,5
018	00408		210	15266	104,6	420	39858	125,8
019	00442		220	16312	106,3	430	41116	126,1
020	00477	39,7	230	17375	108,0	440	42377	126,4
030	00874	46,8	240	18455	109,5	450	43641	127,1

n.	F.	d.	n.	F.	d.	n.	F.	d.
0,460	0,44912	127,1	0,700	0,74768	116,2	0,940	0,97550	58,1
470	46183	127,1	710	75930	114,9	950	98131	52,7
480	47454	127,3	720	77079	113,7	960	98658	46,8
490	48727	127,3	730	78216	112,4	970	99126	39,7
500	50000	127,3	740	79340	111,0	980	99523	
510	51273	127,3	750	80450	109,5	981	99558	
520	52546	127,1	760	81545	108,0	982	99592	
530	53817	127,0	770	82625	106,3	983	99626	
540	55087	126,9	780	83688	104,6	984	99658	
550	56356	126,5	790	84734	102,8	985	99689	
560	57621	126,2	800	85762	100,9	986	99720	
570	58883	125,9	810	86771	98,9	987	99749	
580	60142	125,5	820	87760	96,7	988	99778	
590	61397	125,0	830	88727	94,5	989	99805	
600	62647	124,5	840	89672	92,3	990	99831	
610	63892	123,9	850	90695	89,6	991	99855	
620	65131	123,3	860	91491	87,0	992	99879	
630	66364	122,6	870	92361	84,2	993	99901	
640	67590	121,8	880	93203	81,2	994	99921	
650	68808	121,1	890	94015	78,1	995	99940	
660	70019	120,1	900	94796	74,6	996	99957	
670	71220	119,3	910	95542	71,0	997	99972	
680	72413	118,3	920	96252	67,1	998	99985	
690	73596	117,2	930	96933	62,7	999	99990	

104. Wie ist die vorige Hilfstafel zu verstehen?

Dieselbe enthält drei, mit n, F und d überschriebene Abtheilungen. Die erste enthält Dezimalbrüche in Tausendtheilen und zwar von 0,001 bis mit 0,020, so wie von 0,980 bis mit 0,999 von $1/1000$ zu $1/1000$; zwischen 0,020 bis mit 0,080 aber von $1/100$ zu $1/100$. Kürze halber sind hier, wie in der zweiten Rubrik, die Einerzeichen weggelassen. Die zweite mit F überschriebene Rubrik enthält Flächenfactoren auf die vorigen unter n stehenden Zahlen bezogen auf 5 Dezimalen. Die dritte

Spalte endlich zeigt den zehnten Theil der Unterschiede zweier aufeinanderfolgenden Zahlen in Spalte F.

105. Was bezeichnen die unter n der obigen Tabelle stehenden Zahlen?

Sie drücken den Quotienten aus, welcher durch Division des Kreisdurchmessers in die Höhe eines Kreisabschnittes entsteht. Mißt z. B. in Fig. 15 FG = 19 und CD = 7 Zoll, so ist n = $7/19$ = 0,368; hat ferner FG in Fig. 16 = 13 und CD = 10,1 Zoll, so ist $n = \frac{10,1}{13} = 0,769$. Wenn hierbei der Durchmesser nicht unmittelbar gemessen werden kann, so ist er nach Frage 102 zu berechnen.

106. Wozu dient die mit d überschriebene Spalte der Tabelle?

Nach der Tafel ist für n = 0,360 der unter F stehende Werth = 0,32410; für n = 370 ist F = 0,33636; für n = 0,368 liegt F zwischen diesen zwei Werthen und kann durch Hilfe der d Spalte auf folgende Weise gefunden werden:

für n = 0,360 ist nach der Tafel F = 0,32410
Hierzu wegen der letzten Ziffer 8
der Zahl 0,368 und der in d
stehenden Differenz 122,6 × 8 = 980,8

für n = 0,368 ist also F = 0,33391.

Auf gleiche Weise ist die Rechnung (Interpolation) für n = 0,769 wie folgt:

n = 0,760 giebt für F = 0,98658
9 × Differenz 46,8 . . = 421,2

für n = 0,769 ist also F = 0,99079.

107. Wie kann nun durch Hilfe der Tafel ein Kreisabschnitt berechnet werden?

Dadurch, daß man zunächst die Fläche eines Kreises für den ganzen Durchmesser berechnet und diese durch die nach voriger Frage für Durchmesser des Kreises und Höhe des Abschnittes berechnete Verhältnißzahl F multiplizirt.

108. Auf welche Weise würde hiernach für die beiden, in Frage 105 angegebenen Fälle zu rechnen sein?

Beim ersten Falle ist d = 19; h = 7; n = 0,368 und F = 0,33391. Für d = 19 ist aber die Kreisfläche = 19 × 19 × $^{11}/_{14}$ = 283,64 und die Abschnittfläche = 283,64 × 0,33391 = 94,71 □Zoll. Beim zweiten Falle ist d = 13; h = 10,1; n = 0,769; F = 0,99079 oder nahe 0,991. Die Kreisfläche enthält 13 × 13 × $^{11}/_{14}$ = 132,78 und mithin die Abschnittfläche = 132,78 × 0,991 oder 131,6 □Zoll.

109. In einem Kreise von 21 Zoll Durchmesser hat ein Abschnitt 4,13 Zoll Höhe; wie groß ist dieser?

Zunächst ist $\frac{4,13}{21}$ = 0,197 = n. Weiter ist

für n = 0,190 . . F = 0,13229
„ n = 0,007 . . F = 706,3

für n = 0,197 . . F = 0,13935

Die Kreisfläche ist 21 × 21 × $^{11}/_{14}$ = 346,93 □Zoll; das Segment also 346,93 × 0,139
104079
312237

48,22327 □Zoll.

110. Welche Grundbegriffe sind der Körperberechnung vorzuschicken?

In kurzer Uebersicht sind es folgende:

a) Körper sind Raumgrößen mit Länge, Breite und Höhe.
b) Alle Flächen eines Körpers bilden zusammen seine Außen- oder Oberfläche.
c) Grundfläche eines Körpers ist diejenige, auf welcher er ruht. Obere Fläche ist die voriger entgegengesetzte.
d) Die Höhe eines Körpers ist die senkrechte Entfernung zwischen Grund- und oberer Fläche, oder zwischen Grundfläche und Spitze.
e) Die Achse eines Körpers ist die in der Mitte seines Raumes (seiner Masse) gedachte gerade Linie.

111. Was wird unter einem prismatischen Körper verstanden?

Unter einem prismatischen Körper wird ein solcher verstanden, dessen parallelen obere und Grundfläche völlig gleich sind und gleiche Lage haben; wonach die Seitenfläche oder die Seitenflächen ebenfalls in gleicher Richtung fortlaufen, ohne sich zu verengen oder zu erweitern. Ist hierbei die Grundfläche ein Eck, wie in Fig. 17, so heißt der Körper Prisma; ist sie ein

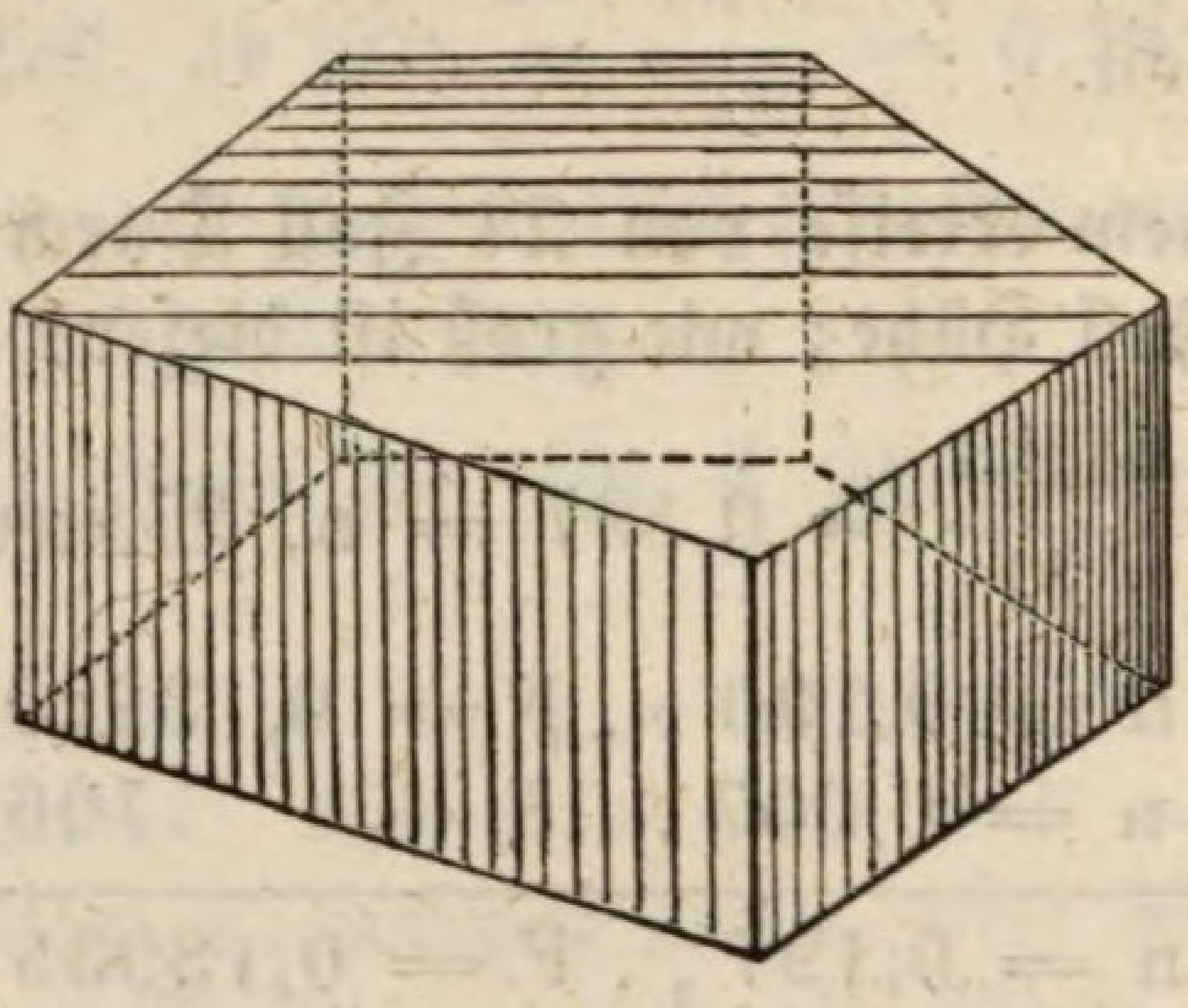


Fig. 17.

Kreis, wie in Fig. 18 u. 19, so bildet der Körper einen Cylinder oder eine Walze. Wiederholt wird nochmals (Fr. 45 zu



Fig. 18.

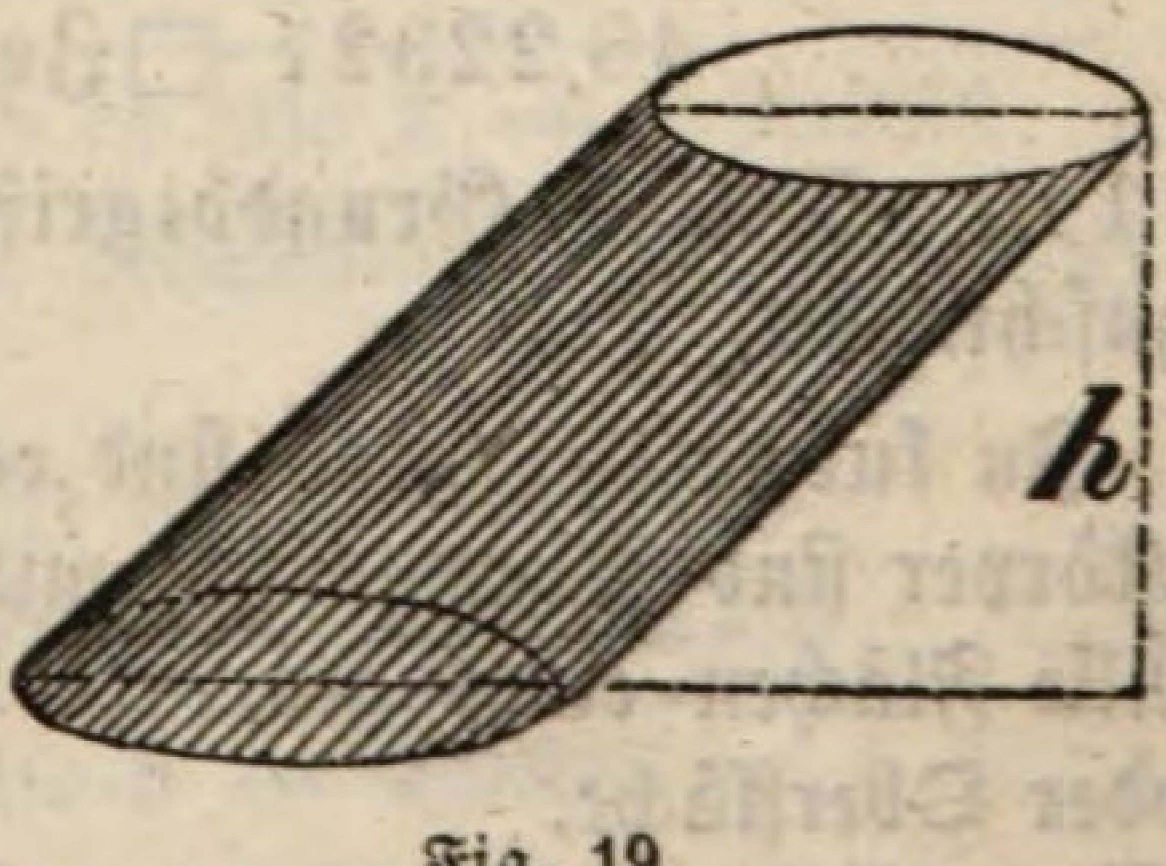


Fig. 19.

Ende), daß bei schiefstehenden prismatischen Körpern, wie bei Fig. 19, die Höhe senkrecht auf die Grundfläche oder ihre Verlängerung genommen werden muß.

112. Welche Regeln dienen namentlich zur Berechnung prismatischer Körper?

Nennt man im Allgemeinen die Grundfläche eines solchen Körpers g, seine Höhe = h und seinen Rauminhalt = I, so ist:

40) Inhalt $= gh.$

41) Höhe $= \frac{I}{g}.$

42) Grundfläche $= \frac{I}{h}.$

43) Seitenfläche = Umfang der Grundfläche × der Seitenlänge.

113. Welcher Körper hat die einfachste Form des Prismas?

Die einfachste Prismaform hat der von 6 Quadraten eingeschlossene Würfel oder Cubus, Fig. 20, weshalb er auch

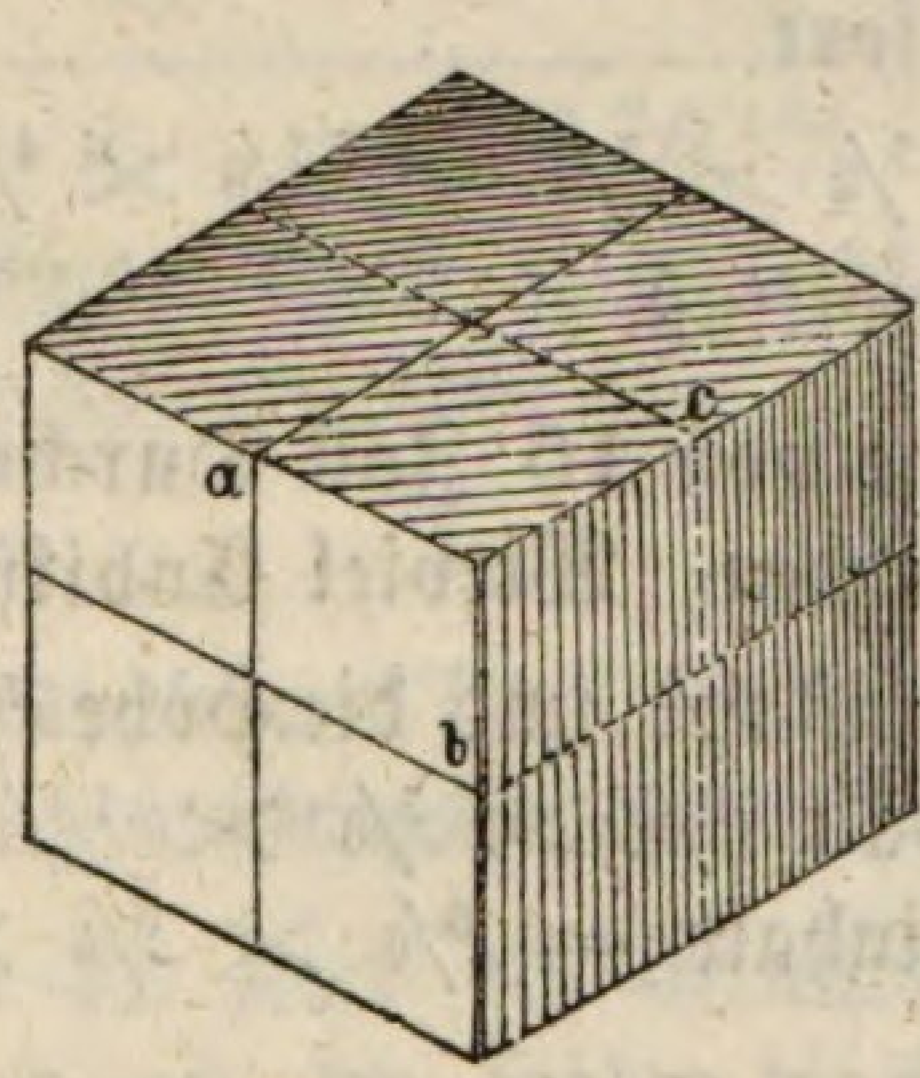


Fig. 20.

als Grundmaß der Körperberechnung gewählt wurde. Seine Seitenflächen und Kanten stehen senkrecht auf einander und haben gleiche Größe, weshalb auch eine für die andere gesetzt werden kann. Weil also $a = b = c$, so ist auch $a \times b \times c = a \times a \times a = a^3 = b^3 = c^3$. Ueber die gegenseitige Vergleichung von Längen-, Flächen- und Körpermaß ist Frage 35 ff. nachzusehen.

114. Die Grundfläche des Prismas Fig. 17 sei ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Seite = 7 Zoll und dessen Höhe = 20 Zoll. Wieviel Cubikzoll enthält dieser Körper?

Nach Frage 65 und 66 ist der Inhalt des Fünfecks $= 7 \times 7 \times 1{,}72 = 84{,}28$ □Zoll. Weil nun nach Formel 40 der Inhalt eines Prismas gefunden wird, wenn man dessen Grundfläche durch die senkrechte Höhe (hier 20) multiplizirt, so ist der Inhalt obigen Körpers $= 84{,}28 \times 20 = 1685{,}6$ Cubikzoll.

115. Der Inhalt balkenförmiger Prismen wird gewöhnlich in Cubikfuß verlangt. Wie läßt sich die Formel 40 am besten zur Berechnung eines solchen Körpers anwenden?

Weil bei solchen Körpern die Grundfläche = Länge $\times$ Breite, so ist auch der Inhalt = Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe. Weil ferner der Inhalt in Cubikfuß verlangt wird, so ist es am gerathensten, die Maße vor der Berechnung auf Fuß zu reduziren. Wäre z. B. ein Balken 7 Ellen 14 Zoll ($= 15\frac{1}{6}$ F.) lang, 16 Zoll ($= 1\frac{1}{3}$ F.) breit und 10 Zoll ($= \frac{5}{6}$ F.) hoch, so ergäbe sich sofort

Inhalt $= 15\frac{1}{6} \times 1\frac{1}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{91}{6} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = 16\frac{23}{27}$ oder ganz nahe 17 Cubikfuß.

116. Eine Walze von 10 Zoll Durchmesser und 20 Zoll Höhe soll berechnet werden. Wieviel Cubikfuß enthält sie?

Der Durchmesser ist $\frac{5}{6}$ und die Höhe $\frac{5}{3}$ Fuß; die Grundfläche als Kreis enthält $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{11}{14}$ Quadratfuß und mithin ist der Cubikinhalt $= \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{11}{14} \times \frac{5}{3} = \frac{1375}{1536}$ Cubikfuß. Nach Cubikzoll und mit Hilfe der Verhältnißzahl 3,142 (Formel 30, Frage 89) wäre der Inhalt $= 5 \times 5 \times 3{,}142 \times 20 = 1571$ Cubikzoll.

117. Wie viel Masse enthält eine $\frac{7}{4}$ellige Scheitklafter, wenn $\frac{1}{8}$ des Inhaltes für leere Zwischenräume abgerechnet wird?

Die Klafter ist 6 Fuß lang, 6 Fuß hoch und $\frac{7}{2}$ breit, hat also $6 \times 6 \times \frac{7}{2} = 126$ Cubikfuß Rauminhalt. Von diesen . . . . 126 Cubikfuß
abgezogen $\frac{1}{8}$ für Hohlung = $15\frac{3}{4}$ „
verbleibt feste Masse . . . . . $100\frac{1}{4}$ Cubikfuß.

118. Es soll das Gewicht eines Balkens von 12½ Ellen Länge, 10 Zoll Höhe und 12 Zoll Breite berechnet werden. Vom nämlichen Stamme wird deshalb ein Stück Holz gewogen, welches 1½ E. lang, 8½ Z. hoch und 10 Z. breit ist, und es findet sich sein Gewicht = 48½ Pfund. Wie schwer ist der Balken?

Der Balken ist 25 F. lang, $\frac{5}{6}$ F. hoch und 1 F. breit und hält also $25 \times \frac{5}{6} \times 1 = \frac{125}{6}$ Cubikfuß. Das Probestück ist 3 F. lang, $\frac{17}{24}$ F. hoch und $\frac{5}{6}$ F. breit, hat also $3 \times \frac{17}{24} \times \frac{5}{6} = \frac{85}{48}$ Cubikfuß. Nun ist die Frage:

$$x \text{ ℔.} = \frac{125}{6} \text{ Cubf.}$$

$$\frac{85}{48} = 48{,}5 \text{ ℔.}$$

$$x = 570\tfrac{10}{17} \text{ ℔.,}$$

Gewicht des Balkens. Weil weiter $\frac{85}{48}$ Cubf. 48½ Pfd. wiegen, so ist auch das Gewicht von 1 Cubf. $= 48\frac{1}{2} : \frac{85}{48} = 27\frac{33}{85}$ Pfd.

119. Eine Walze von 372,5 Cubzoll Inhalt ist 23,4 Zoll hoch, wie groß ist ihre Grundfläche?

Nach Formel 42 wird die Grundfläche gefunden, wenn man den Inhalt durch die Höhe dividirt. Hier ist mithin 372,5 : 23,4 = 15,92 □Zoll die gesuchte Fläche. Ganz auf gleiche Weise ergiebt nach Formel 41 der Inhalt, durch die Grundfläche dividirt, die Höhe des Prismas. Wäre z. B. Inhalt = 618,4 und Grundfläche = 114,7, so ist die Höhe = 618,4 : 114,7 = 5,4.

120. Wie groß ist die Oberfläche des in Frage 114 berechneten Prismas?

Nach Formel 43 ist Umfang × Höhe = Seitenfläche. Der Umfang ist aber 5 × 7 = 35 Zoll, also die Seitenfläche = 35 × 20 = 700 □Zoll. Nun sind noch die obere und die Grundfläche zu addiren:

Grundfläche	=	84,28 □Zoll (Fr. 114).
obere Fläche	=	84,28 „
Seitenfläche	=	700 „
Summa	=	868,56 □Zoll

als die gesammte Oberfläche des gegebenen Prismas.

121. Eine Walze von 16,4 Zoll Durchmesser ist 29,7 Zoll hoch; wie groß ist ihre Rund- und Gesammtoberfläche?

Der Umfang der Walze beträgt $16,4 \times {}^{22}/_{7} = 51,54$ Zoll. Denselben mit der Höhe oder mit 29,7 Zoll multiplizirt, giebt im Produkte 1530,74 □Zoll die gesuchte Rundfläche der Walze. Addirt man hierzu noch die obere und die Grundfläche, so erhält man die ganze Oberfläche der Walze. Grund- und obere Fläche sind aber Kreise von 16,4 Zoll Durchmesser oder $16,4 \times 16,4 \times {}^{11}/_{14} = 211,33$ □Zoll, mithin ist:

Rundfläche der Walze	=	1530,74 □″
Grundfläche „ „	=	211,33 „
obere Fläche „ „	=	211,33 „
Gesammtoberfläche	=	1953,4 □″.

122. Wie verhalten sich die gleichartig liegenden Linien und Flächen ähnlicher Körper?

Werden die Linien, Flächen und Inhalte zweier ähnlicher Körper beziehungsweise L, l; F, f; I, i genannt, so ist allgemein:

$$44)\quad L : l = \sqrt{F} : \sqrt{f} \text{ und } L = \frac{l\sqrt{F}}{\sqrt{f}};$$

$$45)\quad L : l = \sqrt[3]{I} : \sqrt[3]{i} \text{ „ } L = \frac{l\sqrt[3]{I}}{\sqrt[3]{i}};$$

$$46)\quad F : f = L^2 : l^2 \text{ „ } F = \frac{L^2 f}{l^2};$$

$$47)\quad F : f = \sqrt[3]{I^2} : \sqrt[3]{i^2} \text{ „ } F = \frac{f\sqrt[3]{I^2}}{\sqrt[3]{i^2}};$$

$$48)\ I : i = L^3 : l^3 \quad „ \quad I = \frac{i\,L^3}{l^3};$$

$$49)\ I : i = \sqrt{F^3} : \sqrt{f^3} \quad „ \quad I = \frac{i\sqrt{F^3}}{\sqrt{f^3}}.$$

123. Welche allgemeine Gesetze ergeben sich aus diesen Verhältnissen?

Im Allgemeinen folgt, daß sich verhalten:

a) Alle ähnlichen Flächen wie die Quadrate } der gleichartigen
b) „ „ Körper „ „ Würfel } Seiten.
c) Alle gleichartigen Seiten als die Quadratwurzeln ähnlicher Flächen.
d) „ „ „ als die Cubikwurzeln ähnlicher Körper.

Ist z. B. von zwei Quadraten das eine 7 und das andere 10 Zoll lang, so verhalten sich ihre Flächen wie $7^2 : 10^2$, oder wie 49 : 100. Mißt von zwei Kugeln die eine 3 und die andere 4 Zoll im Durchmesser, so verhalten sich ihre Oberflächen wie die Zahlen $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ und ihre Rauminhalte wie $3^3 : 4^3 = 27 : 64$. Hat von zwei Würfeln der eine 30 und der andere 17 Cubikzoll Inhalt, so verhalten sich ihre Seiten wie $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{17} = 3{,}107 : 2{,}571$ (Frage 33) u. s. w. Diese Gesetze sind allgemein, sie gelten für jede Fläche und jeden Körper und müssen deshalb wohl beachtet werden!

124. Eine Menge abgestochene Rasen sind in Gestalt eines Würfels von 2400 Cubf. Inhalt aufgesetzt. Er soll in drei andere Würfel getheilt werden, welche sich wie die Zahlen 1, 1 1/2 und 3 verhalten; wie lang wird die Seite jedes dieser Würfel?

Zunächst ist nach Gesellschaftsrechnung zu bestimmen, wie viel Cubikfuß jeder der drei Würfel erhält.

a = 1	2 × 218,18 = 436,36 Cubf.
b = 1 1/2	3 × 218,18 = 654,54 „
c = 3	6 × 218,18 = 1309,08 „
2400)	11 = 218,18

Nun finden sich die Seiten durch die Cubikwurzel u. z.

$\sqrt[3]{436,36} = 7,585$ F. Seite des ersten

$\sqrt[3]{654,54} = 8,683$ „ „ „ zweiten

$\sqrt[3]{1309,08} = 10,939$ „ „ „ dritten.

125. **Es wird verlangt die Länge, Breite und Dicke eines Balkens zu berechnen, wenn er 36 Cubikfuß enthalten, und dabei die Breite = 1/20 der Länge, so wie die Höhe = 2/3 der Breite sein soll. Wie wird verfahren?**

Zunächst berechne man einen beliebigen Balken, dessen Seiten die gegebenen Verhältnisse haben, z. B. einen von 20 Fuß Länge, 1 Fuß Breite und 2/3 Fuß Höhe. Er hat $20 \times 1 \times 2/3 = 40/3$ Cubf. Die Seiten des gegebenen Balkens von 36 Cubf. verhalten sich nun nach Formel 45 zu den Seiten des berechneten Balkens von $13\frac{1}{3}$ Cubf. wie $\sqrt[3]{36} : \sqrt[3]{13\frac{1}{3}}$, oder wie 3,302 : 2,355 oder kürzer, wie 1 : 0,713. Die gegebenen Dimensionen sind nun

Länge = 20 : 0,713 = 27,849 Fuß.
Breite = 1 : 0,713 = 1,393 „
Dicke = 2/3 : 0,713 = 0,928 „

126. **Ein Viertelscheffelmaß in Walzenform soll 1975 Cubikzoll enthalten und 15 Zoll hoch sein. Wie groß ist der Durchmesser seiner Grundfläche?**

Seine Grundfläche ist nach Formel 42 = 1975 : 15 = 131,667 □ Zoll. Hieraus wird nach Formel 32 = $1\frac{1}{8} \times \sqrt{131,667}$ oder $1\frac{1}{8} \times 11,47$ d. i. 12,9 Zoll.

127. **Wie wird der Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas, Fig. 21, berechnet?**

In Fig. 21 ist ein prisma-ähnlicher Körper vorgestellt, dessen drei Seitenkanten a, b, c verschiedene Länge und dessen Enddreiecke verschiedene Form und Lage haben. Wird dieser Körper bei A senkrecht durchschnitten und nennt man das Durchschnittsdreieck = A, so ist

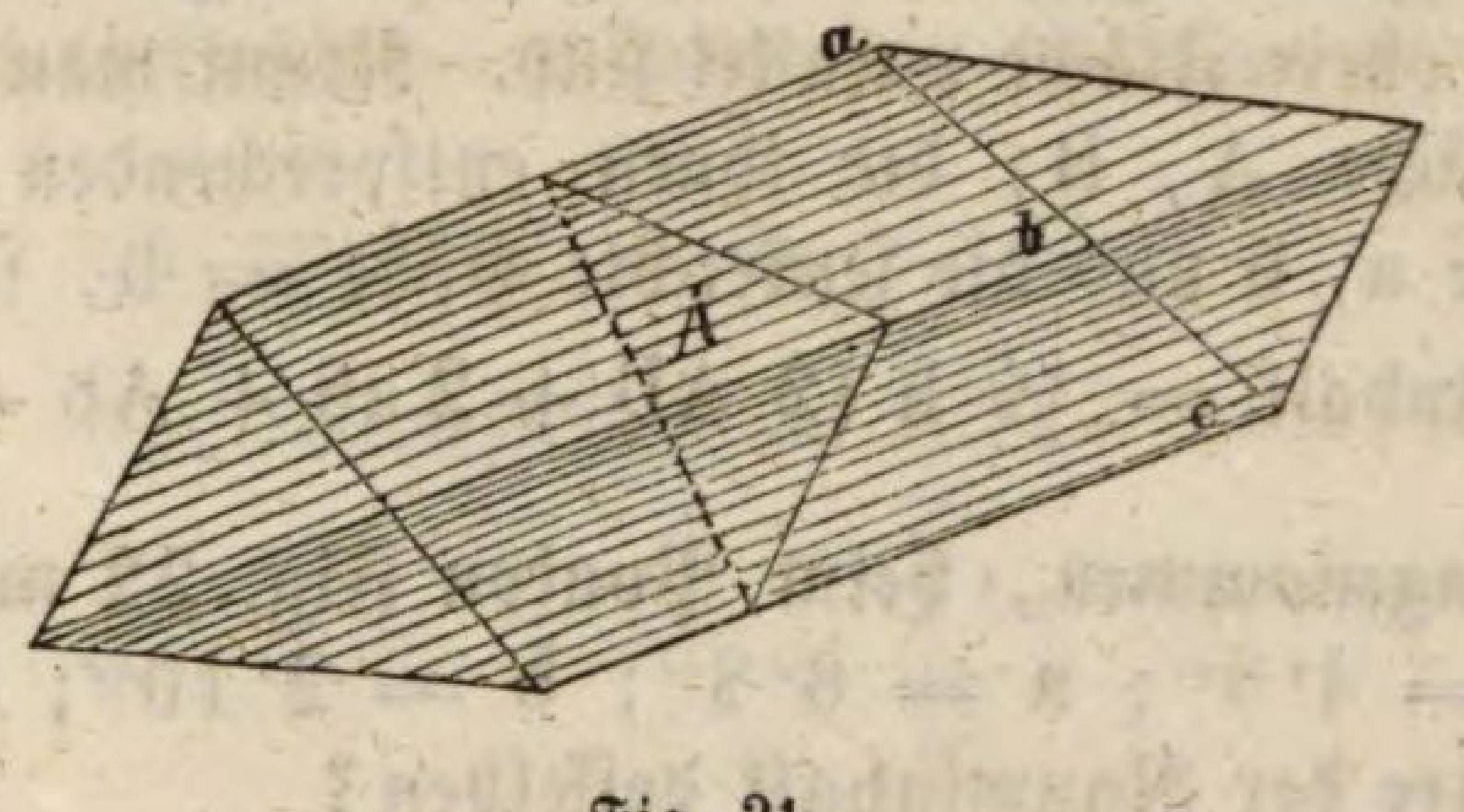


Fig. 21.

$$50)\ \text{Inhalt} = \frac{a + b + c}{3} A.$$

D. i. der Rauminhalt eines derartigen Körpers wird gefunden, wenn man seine drei parallelen Kanten addirt, deren Summe durch 3 dividirt und durch den Quotient die Fläche des Normaldreiecks A multiplizirt. Hat ein derartiger Körper mehr als drei Kanten, so ist er durch Schnitte in dreiseitige Prismatoiden zu zerlegen, diese einzeln zu berechnen und deren Inhalte zu addiren. Betrüge z. B. der Querschnitt A Fig. 21 = 50,8 □Zoll und mäßen a = 5, b = 9 und c = 7 Fuß, so wäre der Inhalt

$$= \frac{5 + 9 + 7}{3} \times 50{,}8 = 7 \times 50{,}8 = 355{,}6 \text{ Cubf.}$$

128. Was wird unter einem Obelisk verstanden und wie ist seine Berechnung?

Unter einem Obelisk oder einem Ponton versteht man einen Körper, dessen vier Seitenflächen verlängert in eine

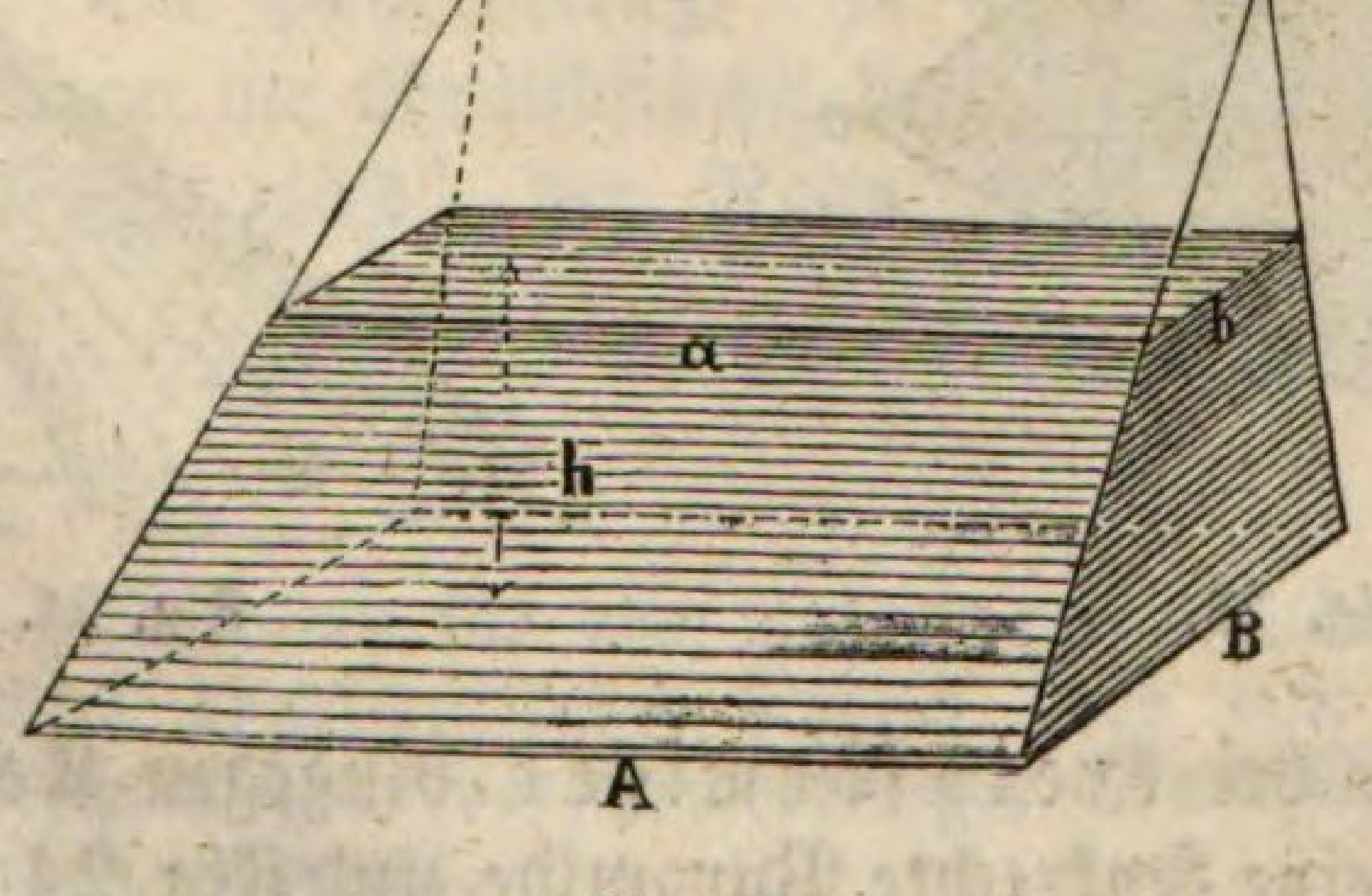


Fig. 22.

Kante rs Fig. 22 zusammenlaufen und dessen rechteckförmige Grund- und obere Fläche parallel sind. Nennt man zwei Seiten der Grundfläche A, B; die ihnen entsprechenden Seiten der oberen Fläche a, b und die senkrechte Höhe = h, so ist

51) Inhalt = $\frac{1}{6}$ h (2 AB + 2 ab + Ab + Ba).

129. **Angenommen, beim Ponton Fig. 22 mäßen: A = 8′10″; B = 4′9″; a = 6′8″; b = 2′10″; h = 5′6″; wie groß wäre der Rauminhalt desselben?**

Nachdem alle Maße auf Bruchtheile des Fußes reduzirt worden, findet sich nach obiger Formel wie folgt:

2 AB	=	2 . $8\frac{5}{6}$. $4\frac{3}{4}$	=	83,916
2 ab	=	2 . $6\frac{2}{3}$. $2\frac{5}{6}$	=	37,778
Ab	=	$8\frac{5}{6}$. $2\frac{5}{6}$	=	25,003
Ba	=	$6\frac{2}{3}$. $4\frac{3}{4}$	=	31,667
Werth der Parenthese			=	178,364

Diesen Werth mit $\frac{1}{6}$ h = $\frac{1}{6}$. 5,5 multiplizirt, giebt m Produkte 163,5 Cubf., den gesuchten Inhalt des Pontons.

130. **Was wird unter einer Pyramide und unter einem Kegel verstanden und welches sind die wichtigsten Regeln zu ihrer Berechnung?**

Körper mit sich gleichmäßig verjüngenden und in eine Spitze auslaufenden Seitenflächen werden bei eckiger Grundfläche

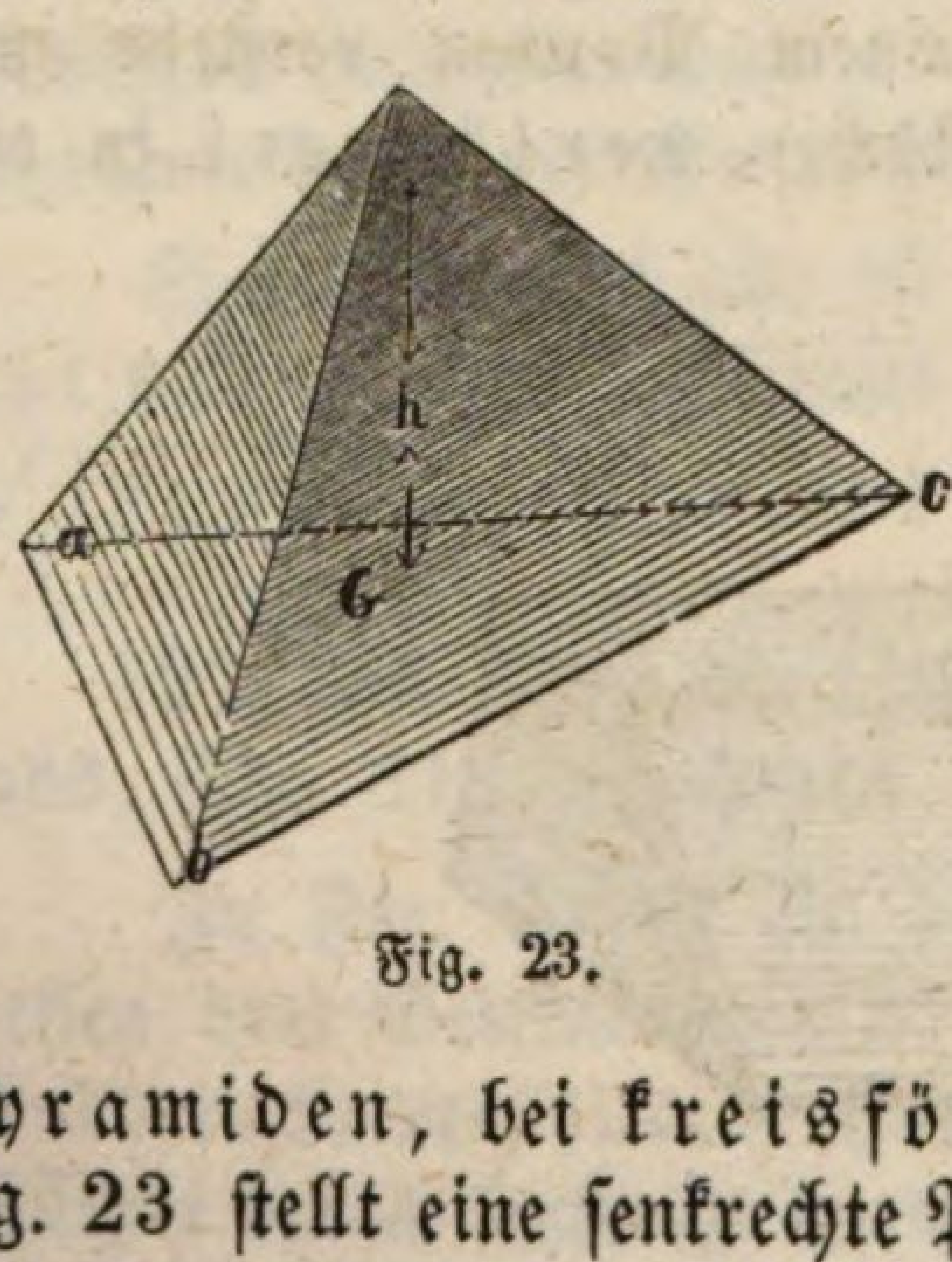


Fig. 23.

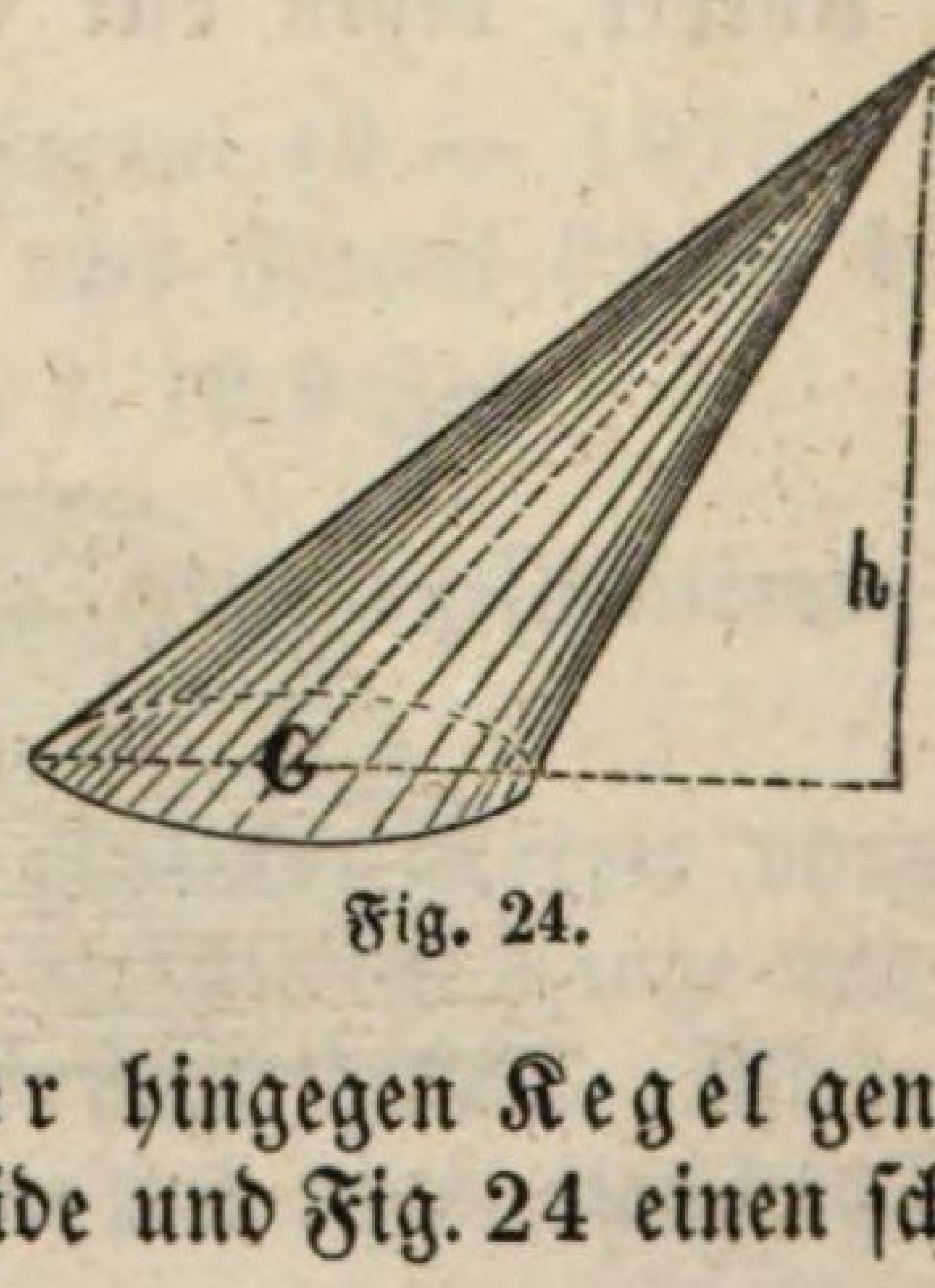


Fig. 24.

Pyramiden, bei kreisförmiger hingegen Kegel genannt. Fig. 23 stellt eine senkrechte Pyramide und Fig. 24 einen schiefen

Kegel (Conus) vor.*) Nennt man bei diesen Körpern den Inhalt = I, die Grundfläche = G und die Höhe = h, so ist allgemein

52) Inhalt $= \frac{1}{3}$ Gh;

53) Grundfläche $= \frac{3\,I}{h}$;

54) Höhe $= \frac{3\,I}{G}$.

131. **Welche Formeln sind bei Berechnung des Conus besonders wichtig?**

Wird beim Kegel der Durchmesser des Grundflächenkreises = d; der Halbmesser desselben = r; die senkrechte Höhe = h und beim geraden Kegel die schiefe (äußere) Höhe = a genannt, so ist noch:

55) Inhalt $= 0{,}26179\,..\,hd^2$;

56) Inhalt $= 1{,}04716\,..\,hr^2$;

57) Seitenfläche $= 1{,}5708\,..\,ad = 1\frac{1}{7}\,ad$;

58) Oberfläche $= 0{,}7854\,..\,d\,(2a + d)$.

Die Oberfläche des schiefstehenden Kegels ist durch Elementargeometrie nicht zu bestimmen.

132. **Eine Parthie Torfziegel sind in Form einer Pyramide von quadratförmiger Grundfläche aufgesetzt, deren Seite 3 Ellen 16 Zoll und die Höhe 5 ½ Ellen mißt. Es werden 64 Stück Ziegel auf 1 Cubikelle gerechnet und 1000 Stück Ziegel kosten 2 ¾ Thlr.; wie theuer ist die ganze Pyramide?**

Die Grundfläche der Pyramide ist $3\frac{2}{3} \times 3\frac{2}{3} = \frac{121}{9}$ Quadratellen. Die Höhe beträgt $\frac{11}{2}$ Ellen und mithin ist nach Formel 52, wenn die Grundfläche durch den dritten Theil der Höhe multiplizirt wird, der Rauminhalt der Pyramide $= \frac{121}{9} \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1331}{54} = 24\,\frac{35}{54}$ Cub.-Ellen. Diese ent-

*) Es ist hierbei ein für alle mal zu merken, daß die Grundfläche eines schief abgeschnittenen Kegels stets eine Ellipse bildet, während in gleichem Falle bei kreisförmiger Grundfläche der Körper selbst plattgedrückt erscheint.

halten $24\,^{35}/_{54} \times 64$ oder 1578 Stück Ziegel und diese kosten $1{,}578 \times 2\,^3/_4 = 4{,}34$ Thlr. = 4 Thlr. 10,2 Sgr.

133. **Wie schwer ist ein Conus von Sandstein in Zollpfund, wenn derselbe an der Grundfläche 2 Ellen 6 Zoll Durchmesser und 5 Ellen 16 Zoll Höhe (sächs.) hat?**

Wegen Berechnung des Gewichtes nach Frage 42 und 43 ist es am bequemsten, den Rauminhalt sofort in Cubikfuß zu suchen. Nun ist der Durchmesser = $4\,^1/_2$ Fuß, mithin die Grundfläche = $^9/_2 \times {}^9/_2 \times {}^{11}/_{14} = 15{,}91$ □ Fuß. Die Höhe mißt $11\,^1/_3$ Fuß, woraus der Inhalt zu $15{,}91 \times 11\,^1/_3 \times {}^1/_3 = 60{,}1$ Cubikfuß folgt. Nun wiegt nach Frage 42 ein sächs. Cubikfuß Wasser 45,4 Pfund und der Sandstein ist 2,32mal so schwer, als ein gleicher Raum Wasser, woraus sich das Gewicht des Conus auf $60{,}1 \times 2{,}32 \times 45{,}4 = 6330$ Pfd. berechnet.

134. **Ein Conus von 36 Ellen Länge soll so zerschnitten werden, daß zwei gleich große Theile entstehen. In welcher Entfernung von der Spitze ist der Schnitt zu führen?**

Der ungetheilte Kegel und die abgeschnittene Spitze sind ähnliche Körper, deren Längen sich nach Frage 123 d als die Cubikwurzeln ihrer Inhalte, d. i. als $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{1}$ oder, nach Frage 33, als $1{,}26 : 1$ verhalten. Man hat nun die Proportion $1{,}26 : 1 = 36$ Ellen : x und findet $x = 28{,}6$ Ellen. So weit ist der Schnitt von der Spitze entfernt zu führen.

135. **Wie groß ist die Rund- und wie groß die ganze Oberfläche eines Kegels von 33 Zoll schiefer Höhe und 20 Zoll Durchmesser?**

Nach Formel 57 wird die Rundfläche gefunden, wenn man die schiefe Höhe des Kegels durch den Durchmesser und das Produkt durch 1,5708 multiplizirt, sie ist also $= 20 \times 33 \times 1{,}5708$ oder 1036,728 □ Zoll. Die Grundfläche ist ein Kreis, hat also nach Formel $30 = 10 \times 10 \times 3{,}14159 = 314{,}159$ □ Z. Fläche. Beide Flächen $1036{,}728 + 314{,}159$ addirt, geben 1350,887 □ Zoll als Gesammtfläche des Kegels. Letztere läßt sich unmittelbar nach Formel 58 berechnen, wenn man $d = 20$ und

a = 33 setzt. Es ist hier Fläche = 0,7854 × 20 (66 + 20) = 0,7854 × 20 × 86 = 1350,888 □Zoll, wie vorhin.

136. Was wird unter einem Pyramiden- und unter einem Kegelstutz verstanden und welche Formeln bestimmen deren Rauminhalt?

Diese Körper entstehen, wenn von einer Pyramide oder einem Kegel die Spitze parallel zur Grundfläche abgeschnitten wird. Fig. 25 zeigt einen Pyramiden- und Fig. 26 einen Kegelstutz. Nennt man in beiden die senkrechte Höhe = h, die untere Fläche = A und die obere = B, so ist allgemein:

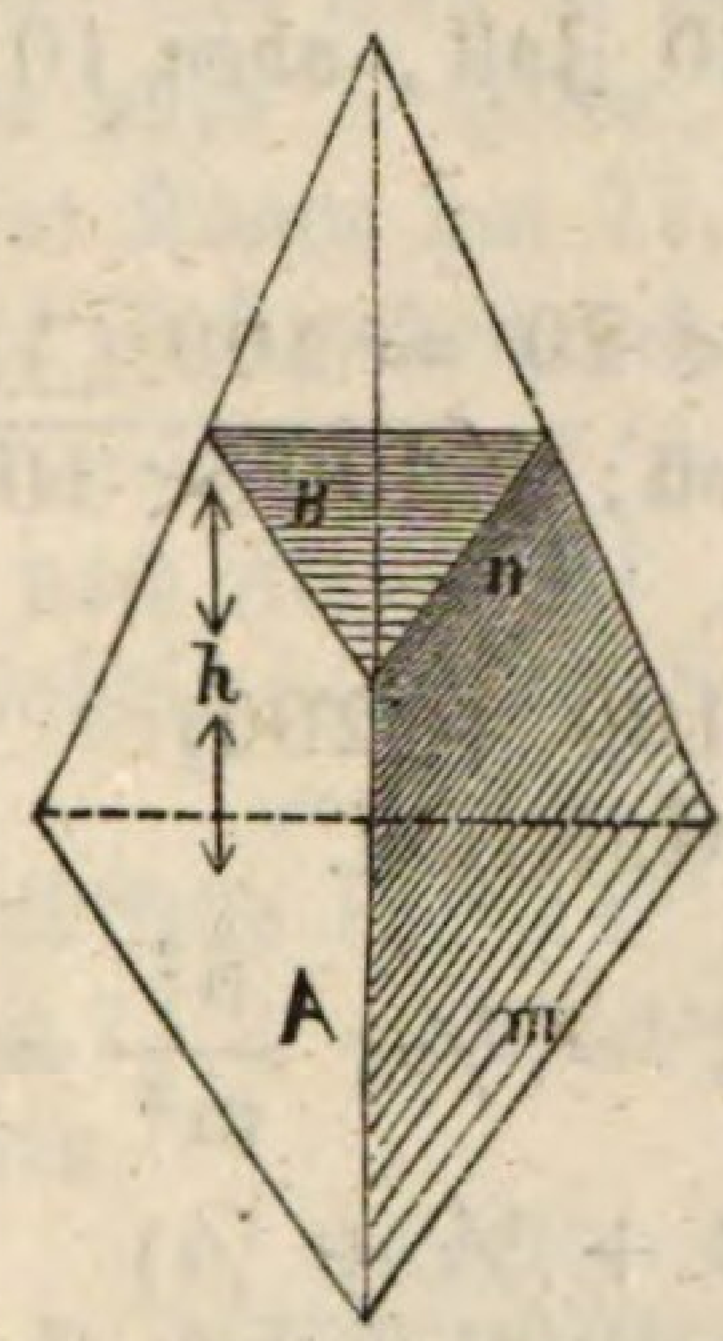


Fig. 25.

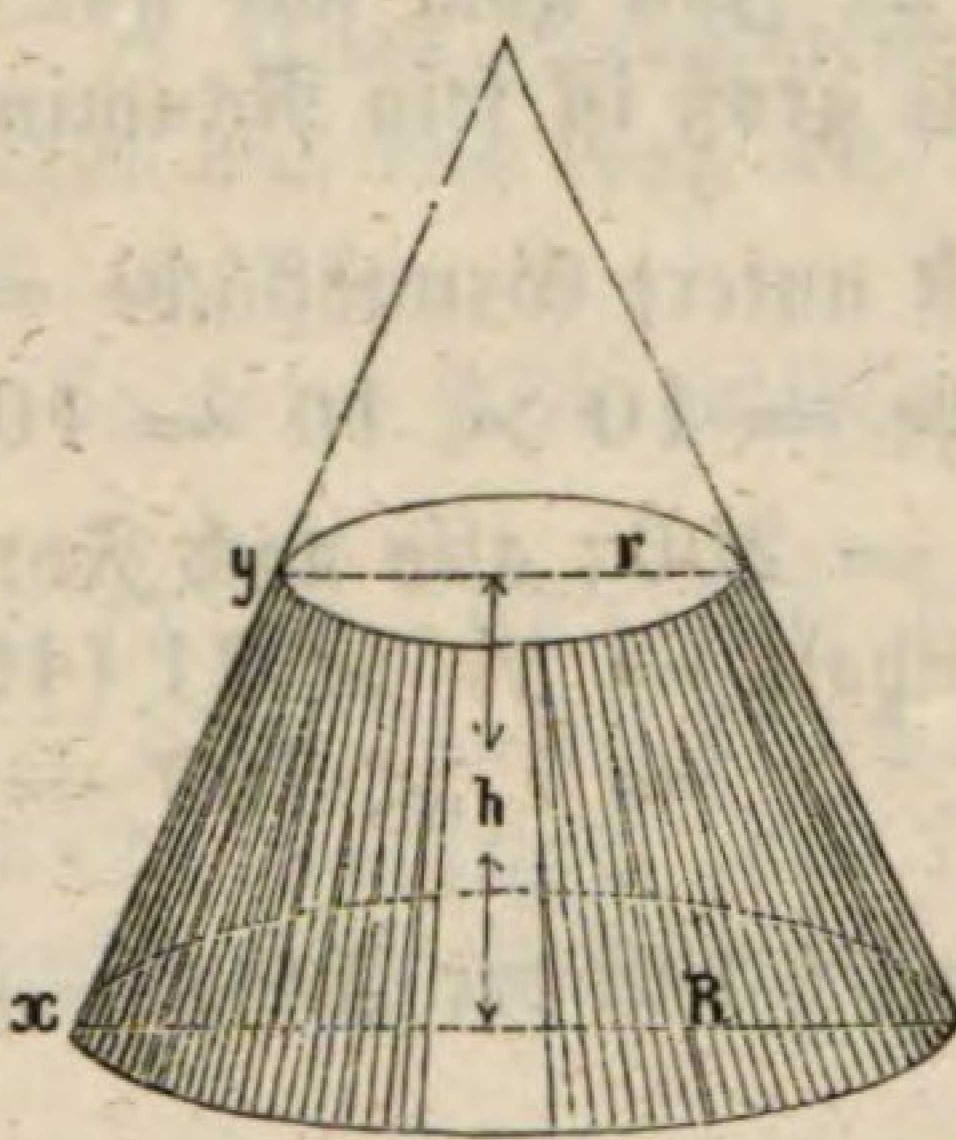


Fig. 26.

$$59)\ \text{Inhalt} = \tfrac{1}{3} h \left(A + B + \sqrt{AB}\right).$$

Für den Pyramidenstutz ist folgende Kästnersche, gewöhnlich in Lehrbüchern nicht genug beachtete Formel bequem, weil bei ihr die Wurzelextraction wegfällt. Nennt man die senkrechte Höhe wieder h, die untere Grundfläche = A; eine Linie an ihr (Seite oder Durchmesser) = m und eine gleichartig liegende Linie der oberen Fläche = n, so ist:

$$60)\ \text{Inhalt} = \tfrac{1}{3} hA \left(1 + \tfrac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}\right).$$

137. Welche Formeln sind für den Kegelstutz besonders bequem?

Wird die senkrechte Höhe des Kegelstutzes Fig. 26 = h;

die schiefe Höhe $xy = s$; der untere Durchmesser $= D$; der untere Halbmesser $= R$; der untere Umfang $= P$; der obere Durchmesser $= d$; der obere Halbmesser $= r$ und der obere Umfang $= p$ genannt, so ist:

61) Inhalt $= 0{,}2618 \ldots h\,(D^2 + Dd + d^2)$;
62) Inhalt $= 1{,}0472 \ldots h\,(R^2 + Rr + r^2)$;
63) Inhalt $= 0{,}0265 \ldots h\,(P^2 + Pp + p^2)$;
64) Oberfläche $= 3{,}1416\,[R^2 + r^2 + 2\,(R + r)\,s]$;
65) Oberfläche $= 0{,}7854\,[D^2 + d^2 + 2\,(D + d)\,s]$.

138. **Ein Pyramidenstutz mit quadratförmigen Grundflächen ist 21 Zoll hoch und hat unten 20 Zoll, oben 10 Zoll Seite. Wie groß ist sein Rauminhalt?**

Es ist untere Grundfläche $= 20 \times 20 = 400$ □Zoll; obere Fläche $= 10 \times 10 = 100$ □Zoll; $\sqrt{400 \times 100} = \sqrt{40000} = 200$; also nach Formel 59

$$\text{Inhalt} = \tfrac{1}{3} \times 21\,(400 + 100 + 200)$$
$$= 7 \times 700 = 4900 \text{ Cubikzoll.}$$

Nach Formel 60 ist der Inhalt, weil $n/m = 1/2$; $\frac{n^2}{m^2} = 1/4$;

$$\text{Inhalt} = \tfrac{1}{3} \times 21 \times 400\,(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4})$$
$$= 7 \times 400 \times \tfrac{7}{4} = 4900 \text{ Cubikzoll w. o.}$$

Weil hier beide Flächen Quadratzahlen sind, so wurde die Rechnung nach ersterer Formel ebenfalls bequem.

139. **Bei einem anderen Pyramidenstutz sind beide Grundflächen regelmäßige Siebenecke mit 10 Zoll Seite unten und 5 Zoll Seite oben. Die Höhe des Stutzes beträgt 18 Zoll, wie groß ist sein Rauminhalt?**

Die untere Grundfläche ist nach Frage 65 $= 10.10.3{,}63 = 363$ □Zoll; die obere $= 5.5.3{,}63 = 90{,}75$ □Zoll. Nach Formel 59 ist nun

$$\text{Inhalt} = \tfrac{1}{3}.18\left(363 + 90{,}75 + \sqrt{363 \times 90{,}75}\right).$$

Es ist nun $90{,}75 \times 363 = 32942{,}25$; daraus die □Wurzel $= 181{,}5$ und also

$$\begin{aligned} A &= 363 \\ B &= 90{,}75 \\ \sqrt{AB} &= 181{,}5 \end{aligned}$$

$635{,}25 \times 6$ oder $\frac{1}{3}$ Höhe.

3811,5 Cubikzoll Inhalt des Stutzes.

Nach Formel 60 hätte man sofort, weil $\frac{1}{3}\, h = 6$ und $A = 363$ ist,

Inhalt $= 6 . 363\,(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 6 . 363 . \frac{7}{4} = 3811{,}5$ Cubikfuß, wie vorhin.

140. **Ein Faß in Form eines Kegelstutzes ist 2° 18″ hoch und hat oben 6 Ellen, unten 7½ Ellen Durchmesser. Die Dresdner Kanne hat 71,2 Cubikzoll und das Faß 420 Kannen. Wie viel Faß gehen ins Gefäß?**

Hier ist $D = 7\frac{1}{2}$; $d = 6$; $h = 2\frac{3}{4}$, mithin hält das Gefäß nach Formel 61

Inhalt $= 0{,}2618 \times 2\frac{3}{4}\,(7\frac{1}{2}{}^2 + 6^2 + 7\frac{1}{2} . 6)$
$= 0{,}2618 \times 2\frac{3}{4} \times 137\frac{1}{4} = 98{,}813$ Cubelle.

Die Cubikelle hat 24^3 oder 13824 Cubikzoll, das Faß aber $420 \times 71{,}2 = 29904$ Cubikzoll. Der Inhalt des Gefäßes ist mithin

$$\frac{98{,}813 \times 13824}{29904} = 45{,}68 \text{ Faß.}$$

141. **Ein in Form eines Kegelstutzes gewachsener Stamm hat unten 3 Ellen 20 Zoll, oben 1 Elle 18 Zoll Umfang und eine Länge von 16 Ellen 12 Zoll. Wie viel Cubikfuß enthält er?**

Weil hier der Inhalt in Cubikfuß verlangt wird, ist es am bequemsten, die Maße sofort in Fuß auszudrücken. Man hat $P = 3^0\, 20'' = 7\frac{2}{3}$ Fuß; $p = 1^0\, 18'' = 3\frac{1}{2}$ Fuß; $h = 16^0\, 12'' = 33$ Fuß und hieraus nach Formel 63

Inhalt $= 0{,}0265 \times 33\,[(7\frac{2}{3})^2 + (3\frac{1}{2})^2 + (3\frac{1}{2} \times 7\frac{2}{3})]$
$= 0{,}0265 \times 33 \times 97\frac{31}{36} = 85{,}7$ Cubikfuß.

142. **Wie groß ist die gesammte Oberfläche eines Kegelstutzes von 8 Zoll oberem, 10 Zoll unterem Durchmesser und 20 Zoll Seitenlänge?**

Die Berechnung ist nach Formel 65 auszuführen. Setzt man in dieser $D = 10$; $d = 8$ und $s = 20$, so ist

$$\text{Inhalt} = 0{,}785\,[10^2 + 8^2 + 2\,(10 + 8)\,20]$$

Nun ist $10+8=18$; $18 \times 20 \times 2 = 720 = 2\,(D + d)\,s$; $D^2=100$; $d^2 = 64$; ferner $720 + 100 + 64 = 884$; endlich $884 \times 0{,}785 = 693{,}94$ □Zoll gesuchte Oberfläche.

143. **Pyramiden- und Kegelstutze werden oft auch als Prismen berechnet, denen man die mitteln Durchmesser obiger Körper zum Durchmesser giebt; ist dieß Verfahren richtig?**

Nein! Durch diese Berechnungsweise wird stets ein kleinerer Rauminhalt gefunden und es ist die Abweichung vom wahren Inhalte um so größer, um je mehr der Stutz abfällt. Als Beispiel diene ein Kegelstutz von 12 Zoll Höhe, dessen unterer Durchmesser = 10 und der obere = 6 Zoll ist. Der mittle Durchmesser ist hier $\frac{10 + 6}{2} = 8$ Zoll und es ist der Inhalt einer Walze von 8 Zoll Durchmesser und 12 Zoll Höhe = $8 \times 8 \times {}^{11}/_{14} \times 12 = 603{,}4$ Cubikzoll. Nun ist aber $R = 5$ und $r = 3$, also $R^2 = 25$; $r^2 = 9$ und $Rr = 15$; mithin der wahre Inhalt $= 1{,}047 \times 12 \times 49 = 615{,}5$ Cubikzoll, d. i. um 12 Cubikzoll oder um 2% größer. Die Berechnung nach mittlerem Durchmesser ist also nur statthaft, wenn der Körper nur sehr wenig abfällt oder wenn eine geringere Schärfe genügt.

144. **Welche Benennungen sind bei der Kugel zu merken?**

Die Kugel hat die einfachste Körperform und die Eigenschaft, daß alle Punkte ihrer Oberfläche von ihrem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind. Außer ihrem Durchmesser, ihrem Halbmesser und ihrer Oberfläche kommen noch folgende Benennungen bei ihr vor. Als Theile ihrer Oberfläche unterscheiden wir eine hohle Schale ABC, Fig. 27, die Calotte oder Kugelmütze und einen gleichbreiten Streifen DEFG, eine Kugelzone. Theile ihres Rauminhaltes sind der Kugelabschnitt ABC und die Scheibe DEFG, welche letztere gleich ist dem Abschnitte DEH weniger dem Abschnitte GFH.

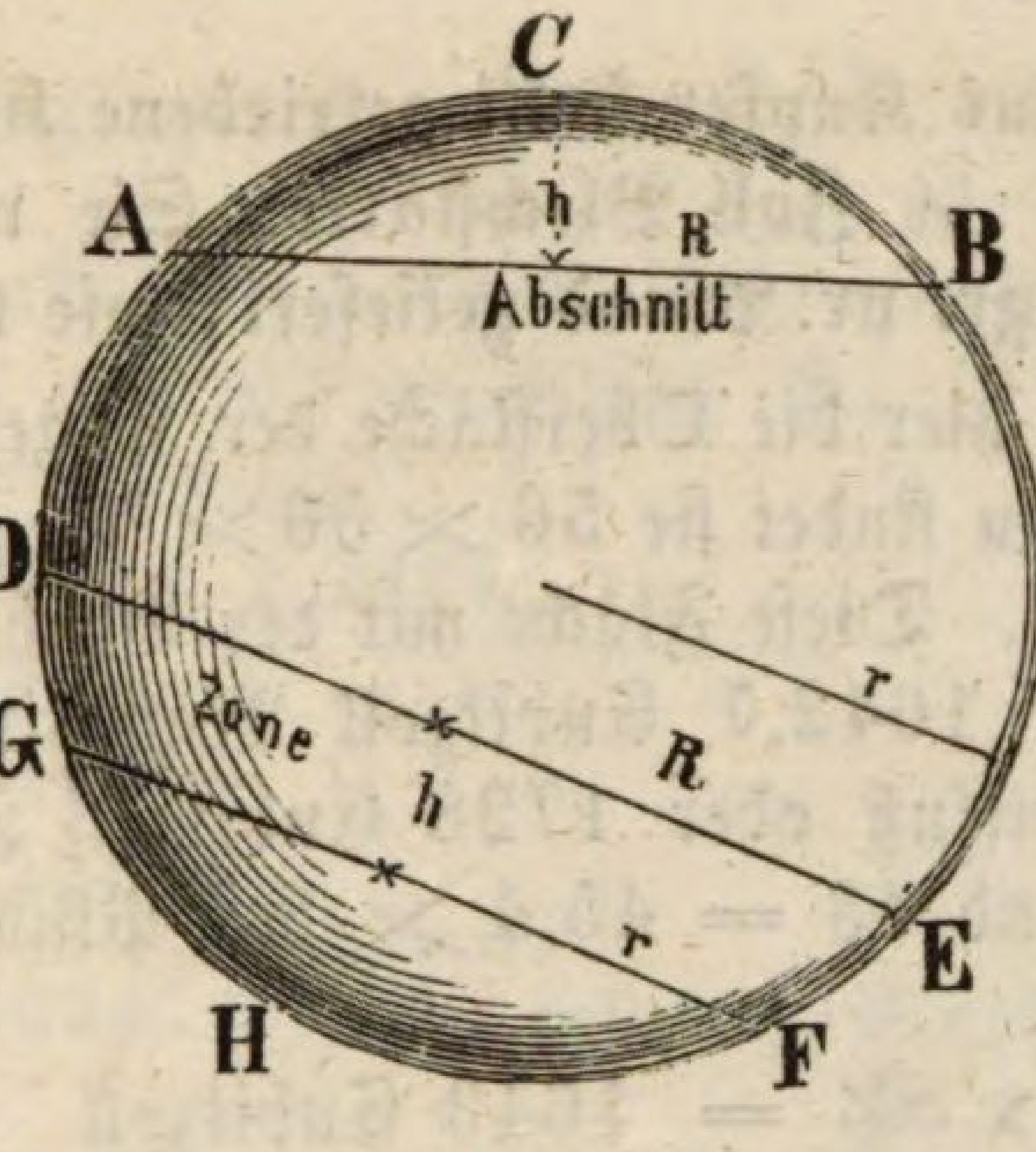


Fig. 27.

145. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung der ganzen Kugel?

Wird der Kugelhalbmesser = r; ihr Durchmesser = d und ihr Raum = I genannt, so ist:

66) Inhalt = 0,5236 . . d^3 = nahe $^{11}/_{21}$ d^3;
67) Inhalt = 4,1887 . . r^3;
68) Oberfläche = 3,1416 . . d^2 = nahe $^{22}/_7$ d^2;
69) Oberfläche = 12,566 . . r^2;
70) Durchmesser = 1,2406 $\sqrt[3]{I}$;
71) Radius = 0,6203 $\sqrt[3]{I}$.

Erwähnt sei hierbei noch das merkwürdige Verhältniß, daß die Kugeloberfläche genau viermal so groß ist, als die Fläche des größten Kugeldurchschnitts.

146. Wie groß ist das Gewicht einer 12zolligen (sächs.) gußeisernen Kugel?

Der Rauminhalt ist $12^3 \times {}^{11}/_{21}$ = 904,78 Cubikzoll, oder $^{11}/_{21}$ Cubikfuß. Nun wiegt 1 Cubikfuß Wasser 45,4 Pfd. und Gußeisen ist 7¼ mal so schwer, als Wasser; das Gewicht der Kugel wird also gefunden, wenn man 45,4 durch 7¼ multiplizirt, was das Gewicht von 1 Cubikfuß Eisen giebt, und das erhaltene Produkt noch $^{11}/_{21}$ mal nimmt. Das Resultat ist 172,41 Pfund, Gewicht der Kugel.

147. Eine aus Kupfer hohl getriebene Kugel hat 56 Zoll Durchmesser und $\frac{1}{6}$ Zoll Blechstärke. Sie wird vom Kupferschmied für 20 Ngr. pr. Pfund geliefert; wie theuer kommt sie?

Zunächst ist hier die Oberfläche der Kugel nach Formel 68 zu berechnen. Man findet sie $56 \times 56 \times {}^{22}/_{7} = 8 \times 56 \times 22 = 9856$ □Zoll. Diese Fläche mit der Blechstärke $= \frac{1}{6}$ Zoll multiplizirt giebt 1642,7 Cubikzoll Masseninhalt der Kugelschale. Ein Cubikfuß oder 1728 Cubikzoll Kupfer wiegt aber nach Frage 42 und 43 $= 45{,}4 \times 8{,}8$ Pfund, mithin ist der Ansatz

$$\begin{aligned} x\ \text{Rℓ} &= 1643\ \text{Cubikzoll} \\ 1728 &= 45{,}4 \times 8{,}8\ \text{Pfd.} \\ 1 &= {}^{2}/_{3}\ \text{Rℓ} \end{aligned}$$

und es findet sich der Kostenpreis für die Kugel zu $253\frac{1}{4}$ Rℓ.

148. Eine Hohlkugel von 14 Zoll Durchmesser und einem inneren Raume von 8 Zoll Weite soll berechnet werden. Wie ist zu verfahren?

Der Inhalt wird gefunden, wenn man zunächst die Kugel als massiv berechnet, und sodann den hohlen kugelförmigen inneren Raum abzieht. Kürzer rechnet man analog Formel 35, indem man den Cubus des inneren Durchmessers vom Cubus des äußeren abzieht und erst den Unterschied durch einen der Faktoren 0,5236 oder ${}^{11}/_{21}$ (Formel 66) multiplizirt. Es ist hiernach für obige Aufgabe $14^3 = 2744$ (Frage 31); ab $8^3 = 512$, bleibt 2232. Weiter ist $2232 \times {}^{11}/_{21} = 744 \times {}^{11}/_{7} = \frac{8184}{7} = 1169\frac{1}{7}$ Cubikzoll, der gesuchte Masseninhalt der Hohlkugel.

149. Es soll eine Kugel von Eisen gegossen werden, so daß ihr Gewicht genau 12 Pfund beträgt. Wie groß ist der Durchmesser zu nehmen?

Hier ist zunächst der Cubikinhalt der Kugel zu suchen. 1728 Cubikzoll Gußeisen wiegen $45{,}4 \times 7\frac{1}{4}$ oder 329,15 Pfund, mithin

$$329{,}15 : 12 = 1728 : \text{Kugelinhalt.}$$

Dieser findet sich ganz nahe 63 Cubikzoll. Nach Formel 70 ist nun der Durchmesser $= 1,2406 \sqrt[3]{63}$, und da nach Frage 33 die Cubikwurzel aus $63 = 3,979$ ist, so berechnet sich der Kugeldurchmesser wie folgt:

$$\begin{array}{l} 3,979 \times 1,2406 \\ \quad 7958 \\ \quad 15916 \\ \qquad 23874 \\ \hline 4,9363474 \end{array}$$

4,9363474 Zoll, gesuchter Durchmesser.

150. Welches sind die wichtigsten Formeln zur Berechnung des Kugelabschnittes?

Man nenne in Fig. 27 den Durchmesser der ganzen Kugel $= d$; ihren Radius $= r$; den Halbmesser der Abschnittsgrundfläche $AC = R$ und die Höhe des Abschnittes $= h$, so ist:

72) Inhalt des Abschnittes $= 3,1416\,(r - \frac{1}{3}h)\,h^2$;
73) Inhalt des Abschnittes $= 0,5236\,(3R^2 + h^2)\,h$;
74) Oberfläche des Abschnittes $= 6,2832\,hr$.

Ist zur Berechnung der Calotte der Kugelradius, der in Formel 74 verlangt wird, nicht bekannt, so läßt sich derselbe nach Frage 102 leicht berechnen.

151. Von einer 20zölligen Kugel wird ein Abschnitt mit 4 Zoll Höhe getrennt; wie groß ist sein Rauminhalt und seine Oberfläche?

Hier ist $r = 10$ und $h = 4$, mithin nach Formel 72 der Inhalt des Abschnittes

$$I = 3,1416\,(10 - \tfrac{4}{3})\,4^2$$

und es ergiebt sich $10 - \frac{4}{3} = 8\frac{2}{3}$; $4^2 = 16$; $3,1416 \times 16 \times 8\frac{2}{3} = 435,6352$ Cubikzoll. Ferner ist die Oberfläche nach Formel $74 = 6,2832 \times 4 \times 10 = 251,328$ □Zoll.

152. Welches sind endlich die wesentlichsten Formeln zur Berechnung der Kugelzone?

Es sei in Fig. 27 der Halbmesser des Kreises $DE = R$; der Halbmesser des Kreises $FG = r$; die Höhe der Zone $= h$ und der Kugeldurchmesser $= d$, so ist:

75) Inhalt der Zone $= 0{,}5236 \ldots h\,[3\,(R^2 + r^2) + h^2]$
76) Rundfläche ders. $= 3{,}1416\ hd.$

153. Wie groß ist der körperliche Inhalt einer Kugelzone von 10 Zoll Höhe, wenn ihr unterer Radius = 30 und der obere = 25 Zoll mißt?

Es ist hier $R = 30$; $r = 25$ und h 10, und mithin nach Formel 75 der Inhalt

$$I = 0{,}5236 \times 10\,[3\,(30^2 + 25^2) + 10^2]$$

Nun ist $30^2 = 900$; $25^2 = 625$; deren Summe = 1525; diese dreimal 4575; hierzu 10^2 oder 100 = 4675; dieß $\times 10 = 46750$; letztere Zahl endlich durch 0,5236 multiplizirt, giebt 24478 Cubikzoll als Inhalt der Zone.

154. Auf einer Kugel von 100 Zoll Durchmesser liegt eine Zone von 5 Zoll senkrechter Höhe; wie groß ist ihr Flächeninhalt?

Hier ist $d = 100$ und $h = 5$, mithin nach Formel 76

$$\text{Rundfläche} = 3{,}1416 \times 100 \times 5.$$

Nach vollzogener Multiplication erhält man 1570,8 □ Zoll zum Resultate.

Dritter Abschnitt.

Die Berechnung der von krummen Linien begrenzten Flächen und der Umdrehungskörper.

155. Wie läßt sich jede krummlinige Fläche durch Näherung berechnen?

In Richtung der größten Flächenausdehnung, nach ab Fig. 28, wird eine Linie gezogen und auf dieser eine beliebige Anzahl gleicher Theile aufgetragen. Je genauer die Fläche berechnet werden soll, um so kleiner müssen diese Theile sein. Durch

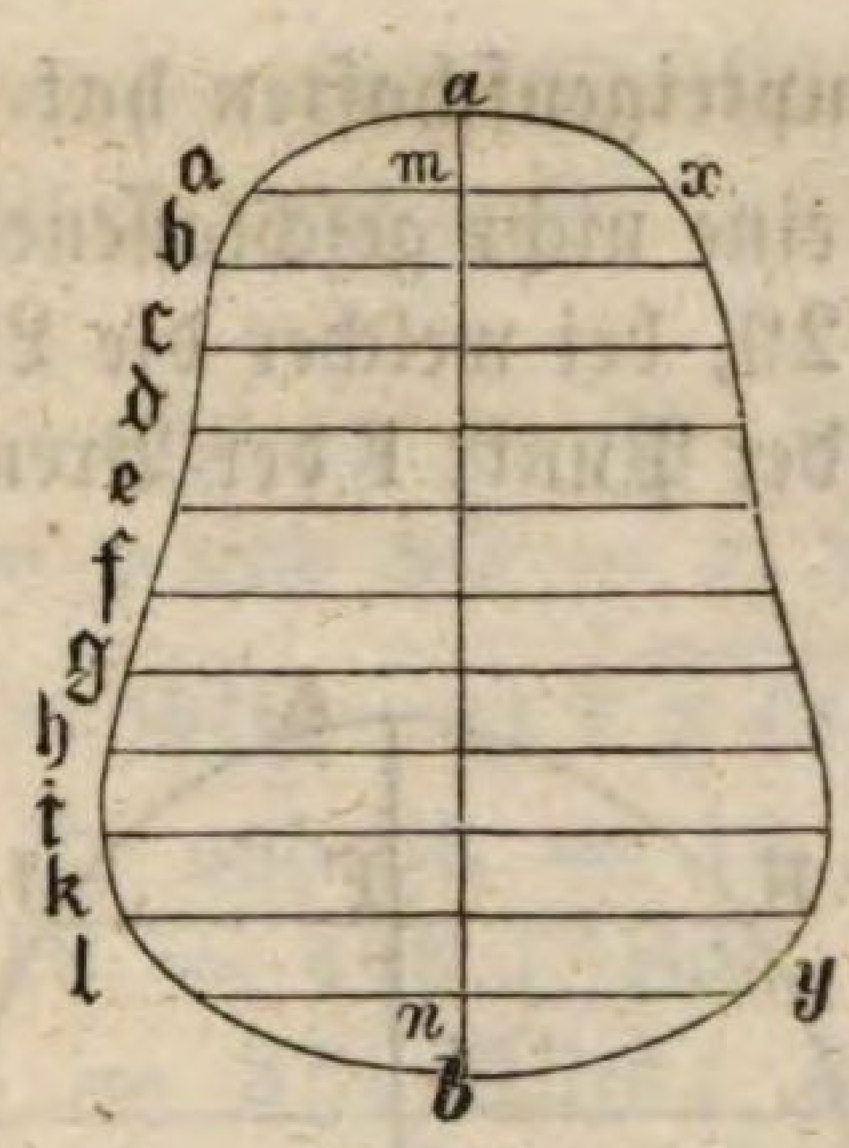


Fig. 28.

diese Theilpunkte werden weiter senkrechte Linien gezogen, so daß die Figur in zwei abgerundete Endfiguren und eine bestimmte Anzahl Paralleltrapeze zerfällt. Die Parallelen a, b, c ꝛc. werden nun genau gemessen, ebenso der Abstand zweier Parallelen, der sich am genauesten findet, wenn man mn mißt und die erhaltene Länge durch die Anzahl Trapeze (in der Figur sind es 10) dividirt. Dieser Abstand sei = d.

Die Berechnung der Figur zerfällt nun in die Bestimmung der Fläche axyl und der Flächen axa, lyb. Nun ist:

75) $axyl = [\frac{1}{2}(a + l) + b + c + d + e + f + g + h + i + k]d$;

76) $axa = \frac{2}{3}\,(ax)\,(ma)$;

$lyb = \frac{2}{3}\,(ly)\,(nb)$;

und die Addition dieser drei Partialflächen giebt den gesuchten Hauptinhalt.

156. Es sei in Fig. 28 mn in 10 gleiche Theile, jeden = 1 Zoll, getheilt. Ferner messen a = 3″; b = 5″; c = 7″; d = 9″; e = 10″; f = 10″; g = 9″; h = 8″; i = 6″; k = 5″; l = 4″; ferner am = 1⅓″ und bn = 1⅓″; wie viel Quadratzoll enthält die ganze Figur?

Zunächst findet sich nach Formel 75 der Inhalt der Fläche axyl

$Inh. = [\frac{1}{2}(3 + 4) + 5 + 7 + 9 + 10 + 10 + 9 + 8 + 6 + 5] \times 1$
$= (\frac{1}{2}\,.\,7) + 59 = 72\frac{1}{2}$ □Zoll;

Hierzu $aax = \frac{2}{3} \times 3 \times 1\frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}$ und $lby = \frac{2}{3} \times 4 \times 1\frac{1}{3} = 3\frac{5}{9}$ □Zoll, mithin enthält die ganze Figur $72\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3} + 3\frac{5}{9} = 78\frac{7}{18}$ □Zoll.

157. Welche Haupteigenschaften hat die Parabel?

Die Parabel ist eine nicht geschlossene regelmäßig gekrümmte Linie BDHAIEC Fig. 29, bei welcher die Linie AN die Achse, der Punkt A der Scheitel, der Punkt F der Brennpunkt, HI das Para-

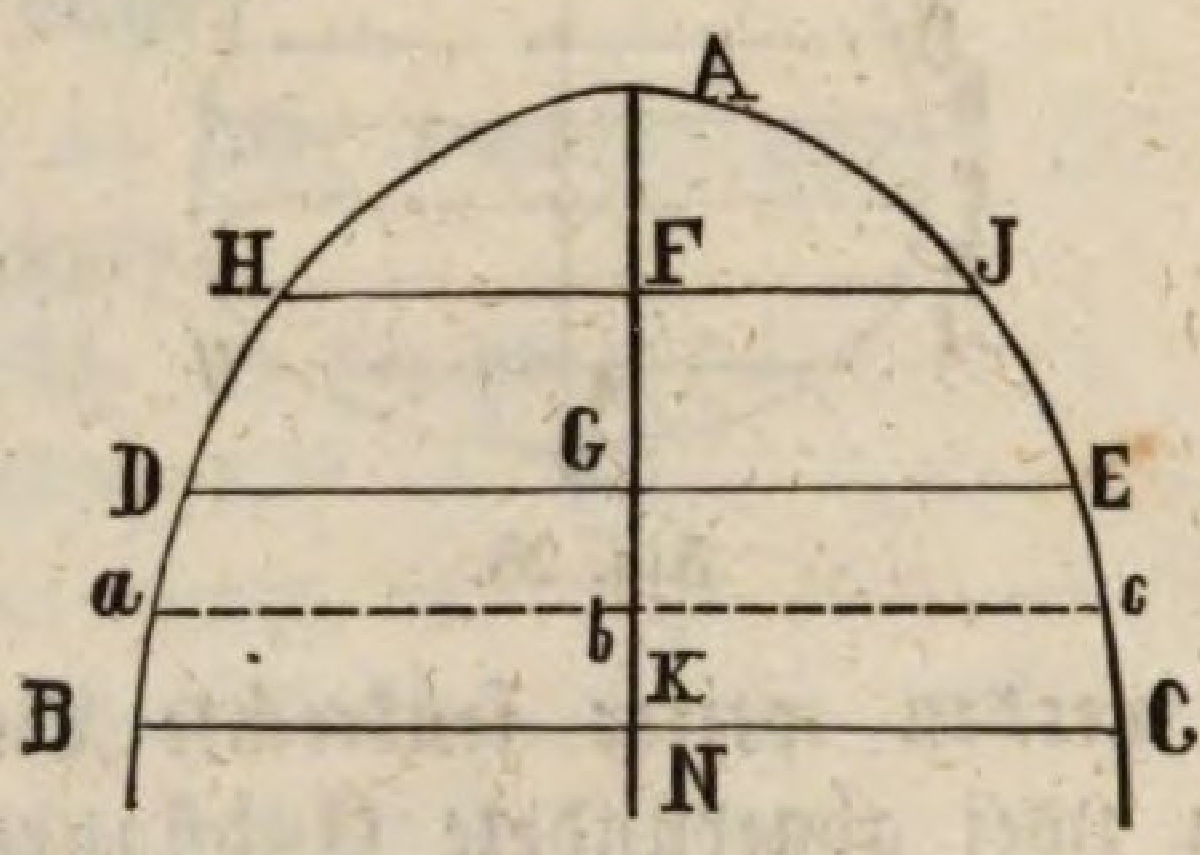


Fig. 29.

meter, AG, AK die Abscissen und DE, BC die Ordinaten genannt werden. Abscissen und die zugehörigen Ordinaten können in unbegrenzter Anzahl gezogen werden, z. B. Ab als Abscisse und ac als Ordinate. Gesetz dieser Linie ist, daß allemal $AG : AK = (DG)^2 : (BK)^2$, oder $AG : Ab = (DG)^2 : (ab)^2$ ist, und so für alle Ordinaten.

Nennt man AF = c, das Parameter HI = p, jede Abscisse AG, Ab u. s. w. = x und jede dazu gehörende Ordinate, als DG, ab u. s. w. = y, so ist:

$$77)\ y = \sqrt{4\,cx};$$

$$78)\ y = \sqrt{px};$$

$$79)\ p = \frac{y^2}{x};$$

$$80)\ c = \frac{y^2}{4x}.$$

Die Länge eines parabolischen Bogens ist näherungsweise:

$$81)\ \text{Bogen } BAC = y + \tfrac{2}{3}\frac{x^2}{y}, \text{ wenn x gegen y sehr klein;}$$

$$82)\ \text{Bogen } BAC = x + \tfrac{2}{3}\frac{y^2}{x}, \text{ wenn y gegen x sehr klein.}$$

158. Wie wird eine parabolische Fläche berechnet?

Nennt man wieder in Fig. 29 AK = x und BK = y, so ist:

83) Fläche ABC = $\frac{4}{3}\,xy = \frac{2}{3}\,.\,DE \times AG$.

Ist ferner noch HI = p und AG = c, so ist

84) Fläche BDEC $= \frac{4}{3}\left[(c+x)\sqrt{p\,(x+c)} - c\sqrt{pc}\right]$.

Mißt z. B. AK = 20 und BK = 18 Zoll, so ist die Fläche BAC = $\frac{4}{3}\,.\,20\,.\,18 = 480$ □Zoll.

Ist ferner AG = $3\frac{3}{4}$ Ellen; AK = $5\frac{3}{4}$ Ellen und HI = $1\frac{5}{6}$ Ellen, so ist nach Formel 84:

$$\text{Fläche BDEC} = \frac{4}{3}\left[9\sqrt{16\tfrac{1}{2}} - \tfrac{13}{4}\sqrt{5\tfrac{23}{24}}\right]$$

oder nach gehöriger Berechnung der Parenthese = 38,166 □Ellen.

159. Welche Formeln gelten für die Berechnung des parabolischen Conoids?

Wenn sich die parabolische Fläche BAC um die Achse AN dreht, so entsteht ein kegelförmiger Körper, ähnlich einem Heuschober, das parabolische Conoid. Der körperliche Inhalt eines solchen Körpers ist genau = Grundfläche × ½ Höhe, und deshalb ist, wenn man in Fig. 22 BK = R; HF = r; AK = H; FK = h nennt:

85) Conoid BAC $= 1{,}5708\; R^2 H$;

86) Stutz BHIC $= 1{,}5708\; (R^2 + r^2)\, h$;

87) Oberfläche von BAC =

$$0{,}5236\left[\frac{1}{H^2 R^2}\sqrt{(4\,H^2R^2 + R^4)^3} - \frac{R^4}{H^2}\right].$$

160. Ein parabolisches Conoid soll bei $2\frac{1}{6}$ Ellen Höhe 4 Cubikellen fassen; wie groß wird sein Durchmesser sein?

Nach Formel 85 läßt sich der Radius dadurch berechnen, daß man den Inhalt durch 1,5708 × Höhe dividirt und aus dem Quotient die □Wurzel zieht. Nun ist 1,5708 × $2\frac{1}{6}$ = 3,4034. Hiermit in den Inhalt = 4 dividirt, giebt 1,176177 und daraus die □Wurzel = 1,084 Ellen für den Radius oder 2,168 Ellen für den Durchmesser.

161. **Eine parabolisch gewölbte Kuppel hat 9 Ellen Halbmesser und 6 Ellen Höhe. Wie groß ist ihre Oberfläche?**

Um diese Frage nach Formel 87 zu lösen, ist R = 9 und H = 6 zu setzen, mithin

$$\text{Fläche} = 0{,}5236 \left[\frac{1}{36.81} \sqrt{(4.36.81 + 6561)^3} - \frac{6561}{36} \right].$$

Die Parenthese läßt sich am besten logarithmisch auflösen. Die Fläche enthält 346,361 □Ellen.

162. **Was ist eine Ellipse und wie wird sie berechnet?**

Eine Ellipse ist eine längliche, geschlossene, regelmäßig gekrümmte Linie ABCD, Fig. 30, von der Eigenschaft, daß die

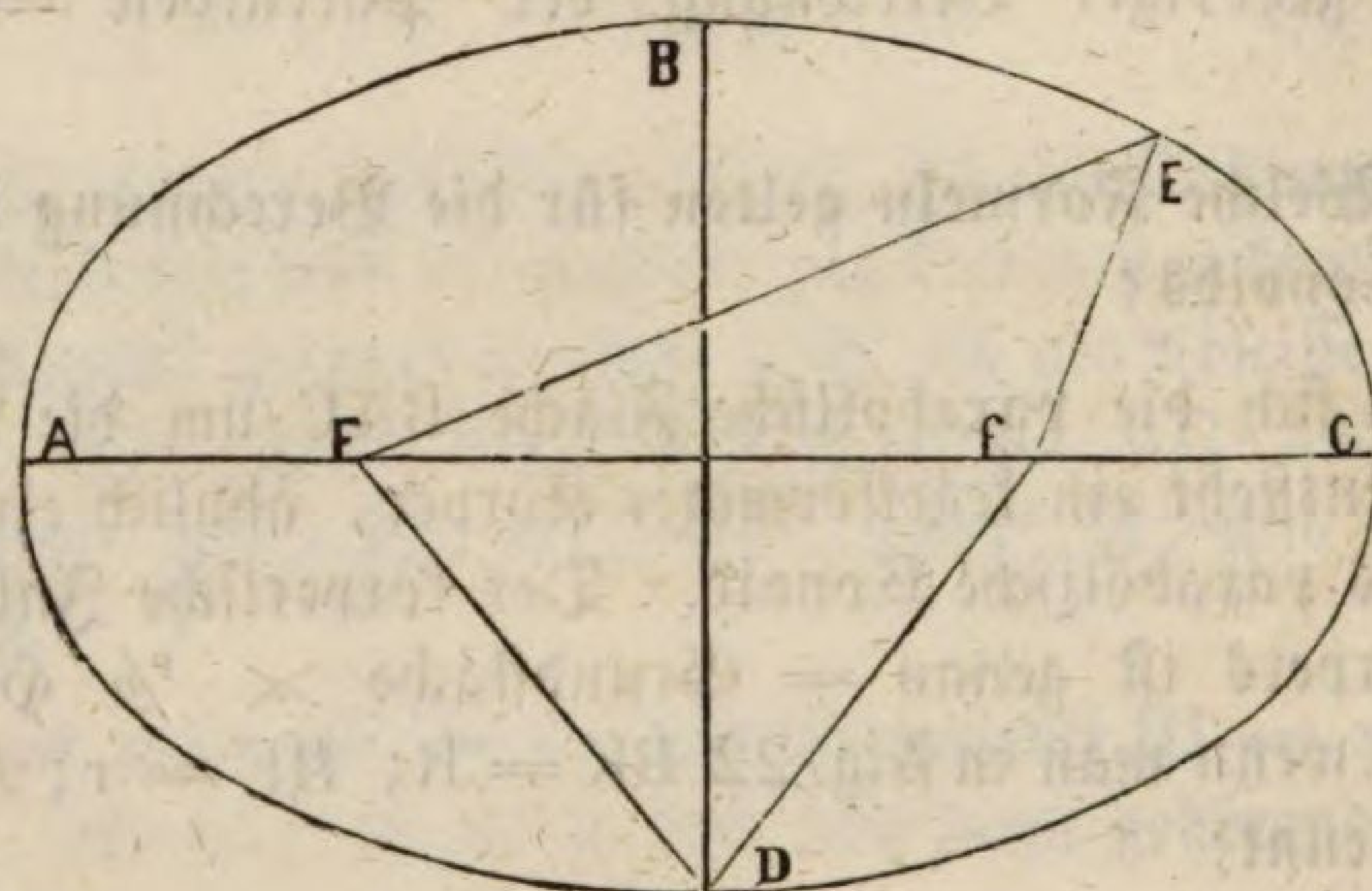


Fig. 30.

von zwei bestimmten Punkten F und f (den Brennpunkten) nach jedem beliebigen Punkt der krummen Linie gezogenen Linien zusammen genau so groß sind, wie der größte Durchmesser der Ellipse. So ist z. B. in voriger Figur FE + Ef = FD + Df AC. Den größten Durchmesser AC nennt man die große und den kleinsten BD die kleine Achse der Ellipse.

Wird die große Achse AC = a und die kleine BD = b genannt, so ist:

88) Umfang der Ellipse $= 3{,}08 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

89) Fläche der Ellipse $= 0{,}7853\ ab.$

163. Eine Ellipse ist 10 Fuß lang und 6 Fuß breit, wie groß ist ihr Umfang und ihr Flächeninhalt?

Der Umfang ist nach Formel 88 $= 3{,}08 \sqrt{\frac{100 + 36}{2}}$ $= 3{,}08 \sqrt{66} = 3{,}08 \times 8{,}246 = 25{,}398$ Fuß. Die Fläche findet sich nach Formel 89 $= 0{,}7853 \times 10 \times 6 = 47{,}118$ □Fuß.

164. Was ist ein Sphäroid und wie wird es berechnet?

Ein Sphäroid entsteht, wenn sich eine Ellipse, Fig. 30, entweder um die große oder um die kleine Achse dreht. Im ersten Falle ist es ein langgestreckter, eiförmiger, im zweiten ein plattgedrückter Körper.

Wird die große Achse AC wieder $= a$ und die kleine BD $= b$ genannt, so ist:

90) Inhalt des langen Sphäroids $= {}^{11}\!/_{21}\ a . b^2$;

91) Inhalt des flachen Sphäroids $= {}^{11}\!/_{21}\ a^2 . b$.

165. Wenn die große Achse einer Ellipse = 20 und die kleine = 10 Zoll ist, wie groß wird ein aus ihr entstehendes eiförmiges und wie groß ein plattes Sphäroid sein?

Der Inhalt des eiförmigen Sphäroids beträgt nach Formel 90, $a = 20$ und $b = 10$ gesetzt $= {}^{11}\!/_{21} . 20 . 10^2 = {}^{11}\!/_{21} \times 2000 = 1047{,}6$ Cubikzoll. Der Inhalt des flachgedrückten hingegen ist $= {}^{11}\!/_{21} \times 20^2 \times 10 = {}^{11}\!/_{21} \times 4000$ $= 2095{,}2$ Cubikzoll.

166. Was ist ein Oval und wie wird es gezeichnet und berechnet?

Ein Oval ist eine der Ellipse ähnliche Linie und Fläche, Fig. 31, welche jedoch die Eigenschaft der letzteren, daß FE + Ef = AC (Fig. 30), nicht hat. Weil sich das Oval durch Hilfe des Zirkels sehr leicht zeichnen läßt, wird es gewöhnlich für die Ellipse gesetzt, wenn nicht die größte Schärfe nöthig ist.

Die Zeichnung selbst geschieht auf folgende Weise:

Es sei ein Oval von der gegebenen Länge ab und der Breite no zu zeichnen. Setze diese Linien in ihrer Mitte senkrecht auf einander, trage cn = ½ no von a nach d; theile cd

in 3 gleiche Theile, trage einen solchen Theil von d nach e, mache cf = ce, nimm ef in den Zirkel und bilde die gleichseitigen

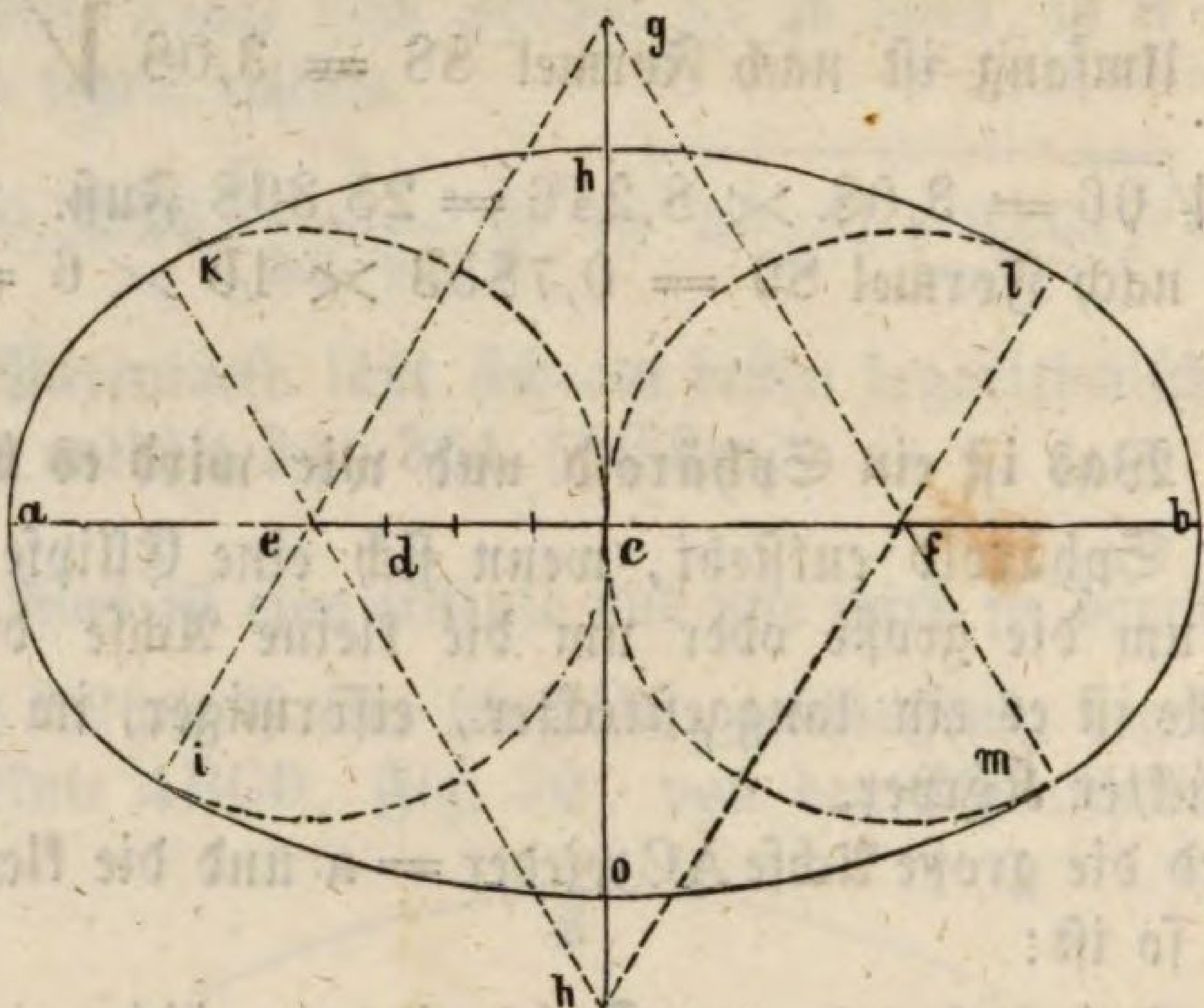


Fig. 31.

Dreiecke efg, efh; beschreibe aus e den Bogen iak, aus f den Bogen lbm, aus g den Bogen iom und aus h den Bogen kgl, so ist das Oval fertig. Die Berechnung geschieht gewöhnlich wie bei der Ellipse, indem man Inhalt = $\frac{11}{14}$. ab . no setzt, doch wird im nächsten Abschnitte, Frage 204, ein genaueres Verfahren gelehrt werden.

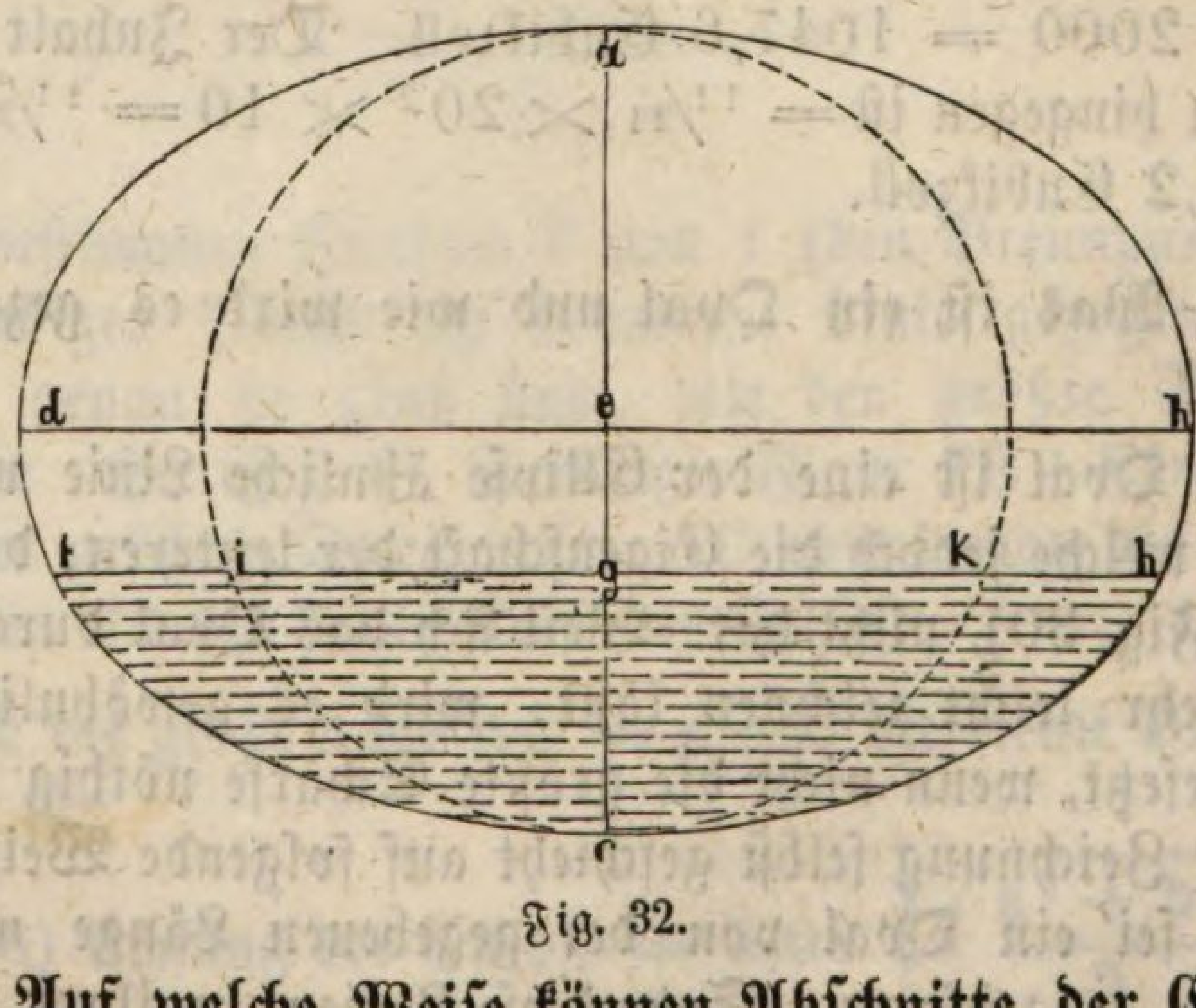


Fig. 32.

167. Auf welche Weise können Abschnitte der Ellipse und des Ovals berechnet werden?

Am leichtesten geschieht dieß mit Hilfe der Tafel in Frage 103. Geht der Schnitt ik Fig. 32 der großen Ovalachse parallel, so berechne man zuerst den Inhalt ikc eines Kreises, welcher die kleine Ovalachse zum Durchmesser und cg zur Höhe hat. Ist nun dieses Segment = S, die große Ovalachse = a und die kleine = b, so ist

92) Ovalsegment = $S \times a/b$;

geht hingegen der Schnitt parallel mit der kleinen Ovalachse, wie gh Fig. 33, so berechne man zuerst das Segment cdb eines

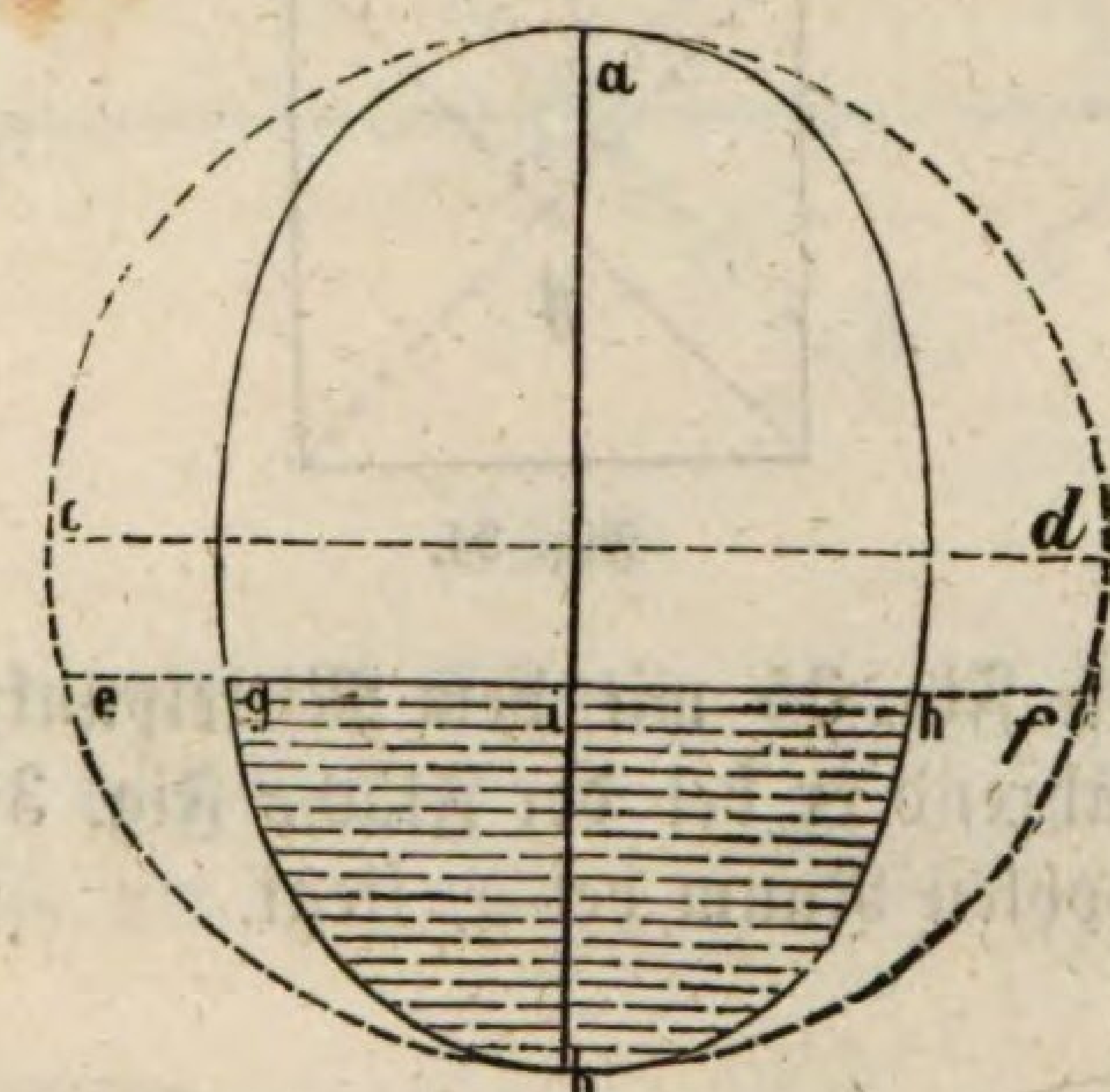


Fig. 33.

Kreises, welcher die große Ovalachse zum Durchmesser hat, und setze

93) Ovalsegment = $S \times b/a$.

168. **Eine Ellipse ist parallel zur kleinen Achse geschnitten und hat eine Schnitthöhe von 10 Zoll. Wenn nun die große Achse = 30 Zoll, und die kleine Achse = 20 Zoll mißt, wieviel Quadratzoll enthält das Segment?**

Nach Anleitung der Fragen 103 bis 109 ist zunächst ein Kreisabschnitt von 10 Zoll Höhe für 30 Zoll Durchmesser zu berechnen. Die ganze Kreisfläche ist $30 \times 30 \times 11/14$ = 707 □Zoll. Das n der Tafel ist $10/30 = 0{,}333$; also F = 0,29139, mithin der Kreisschnitt $S = 707 \times 0{,}291 = 205{,}74$ □Zoll. Der Ellipsenschnitt ist nun nach Formel 93 = $205{,}74 \times 20/30 = 137{,}16$ □Zoll.

169. Was wird unter dem Schwerpunkte einer Linie und einer Fläche verstanden?

Für jede Linie und für jede Fläche (auch für jeden Körper) giebt es einen Punkt von der Lage, daß die ganze Linie oder die ganze Fläche, wenn solche schwer gedacht werden, im Gleichgewichte ruht, wenn dieser Punkt unterstützt ist. Dieser Punkt — der Schwerpunkt — kann sowohl in als außer die Linie oder Fläche fallen, wie er z. B. beim Quadrate, Fig. 34,

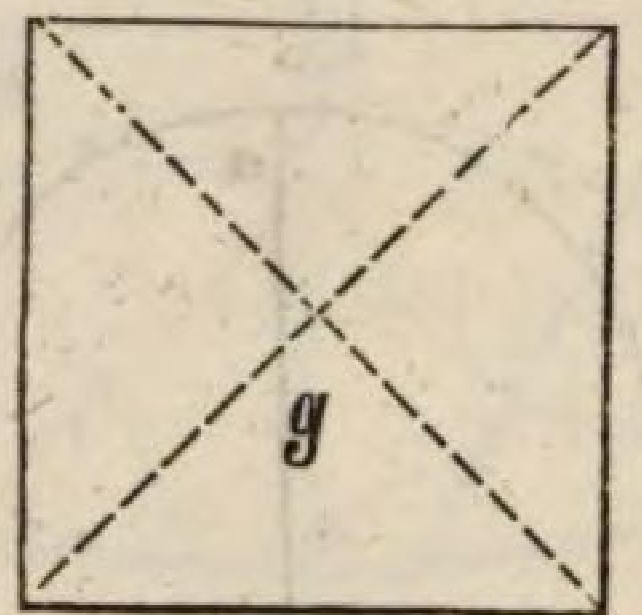


Fig. 34.

und beim Kreise Fig. 35 mit dem Mittelpunkte der Fläche zusammenfällt, während er bei der Fläche Fig. 36 außerhalb derselben, in dem hohlen Raum bei g, liegt.

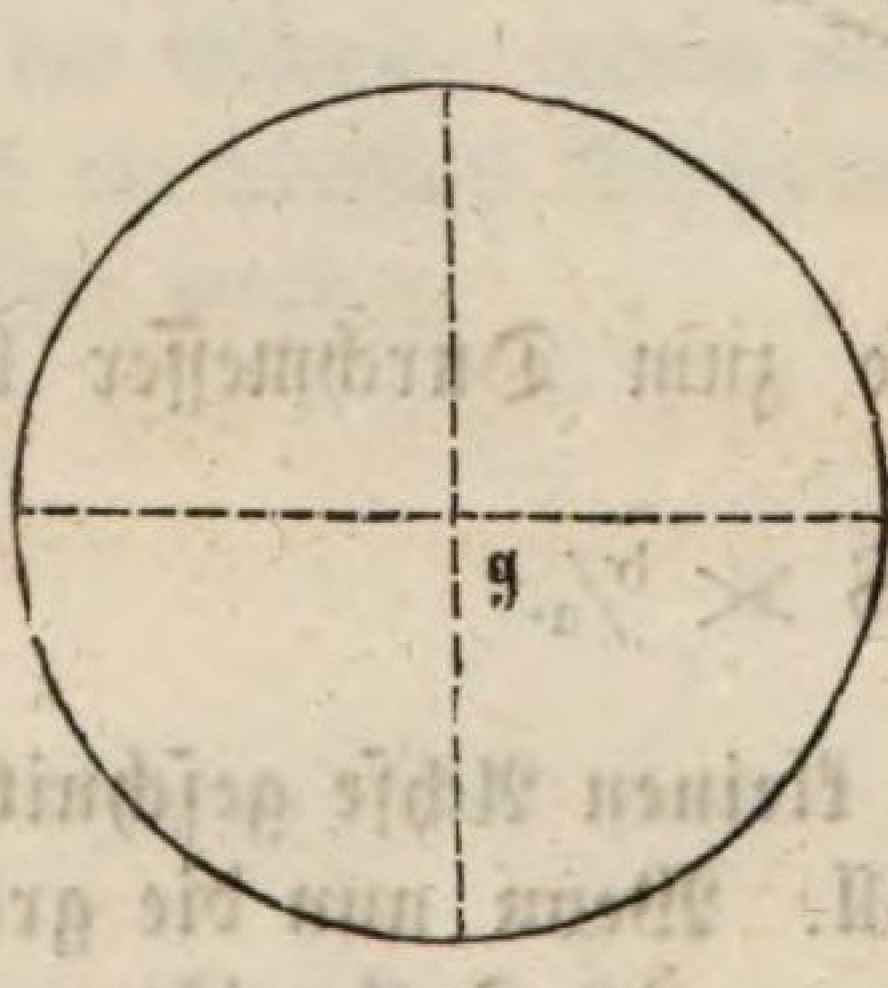


Fig. 35.

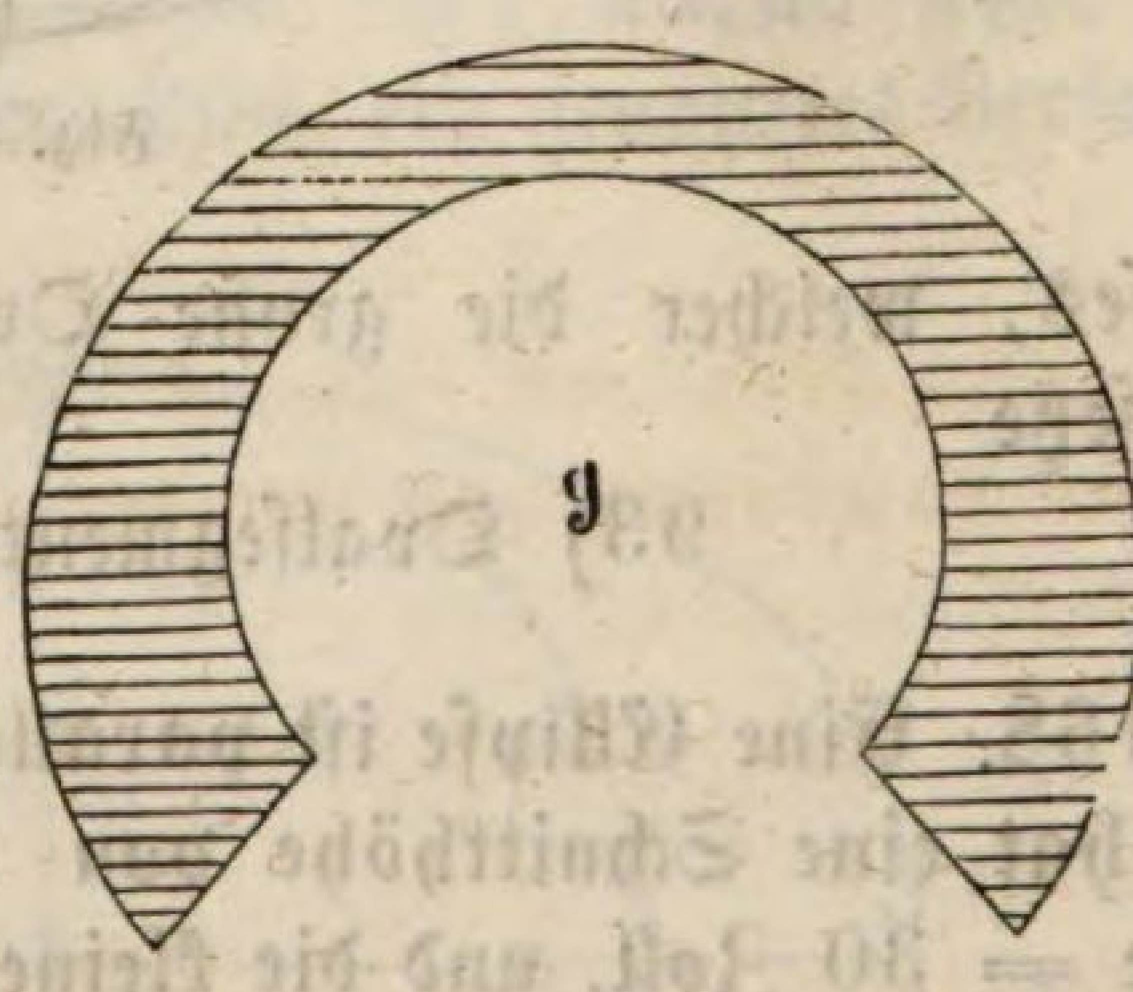


Fig. 36.

170. Wie wird der Schwerpunkt für die Kreislinie, den Halbkreis, den Quadranten und den Kreisbogen gefunden?

Der Schwerpunkt einer Kreislinie fällt mit dem Mittelpunkte des Kreises zusammen. Der Schwerpunkt eines Halbkreises, als Linie gedacht, wird gefunden, wenn man auf dem Centrum C, Fig. 37, die Senkrechte cd errichtet und cm = 7/11

Radius nimmt. — Für den Quadranten agd, Fig. 37, findet sich der Schwerpunkt s, wenn man den Bogen ad in g halbirt und cs = $\frac{9}{10}$ Radius nimmt. — Für jeden Kreisbogen, als dhb, Fig. 37 endlich, mag derselbe größer oder kleiner, als ein

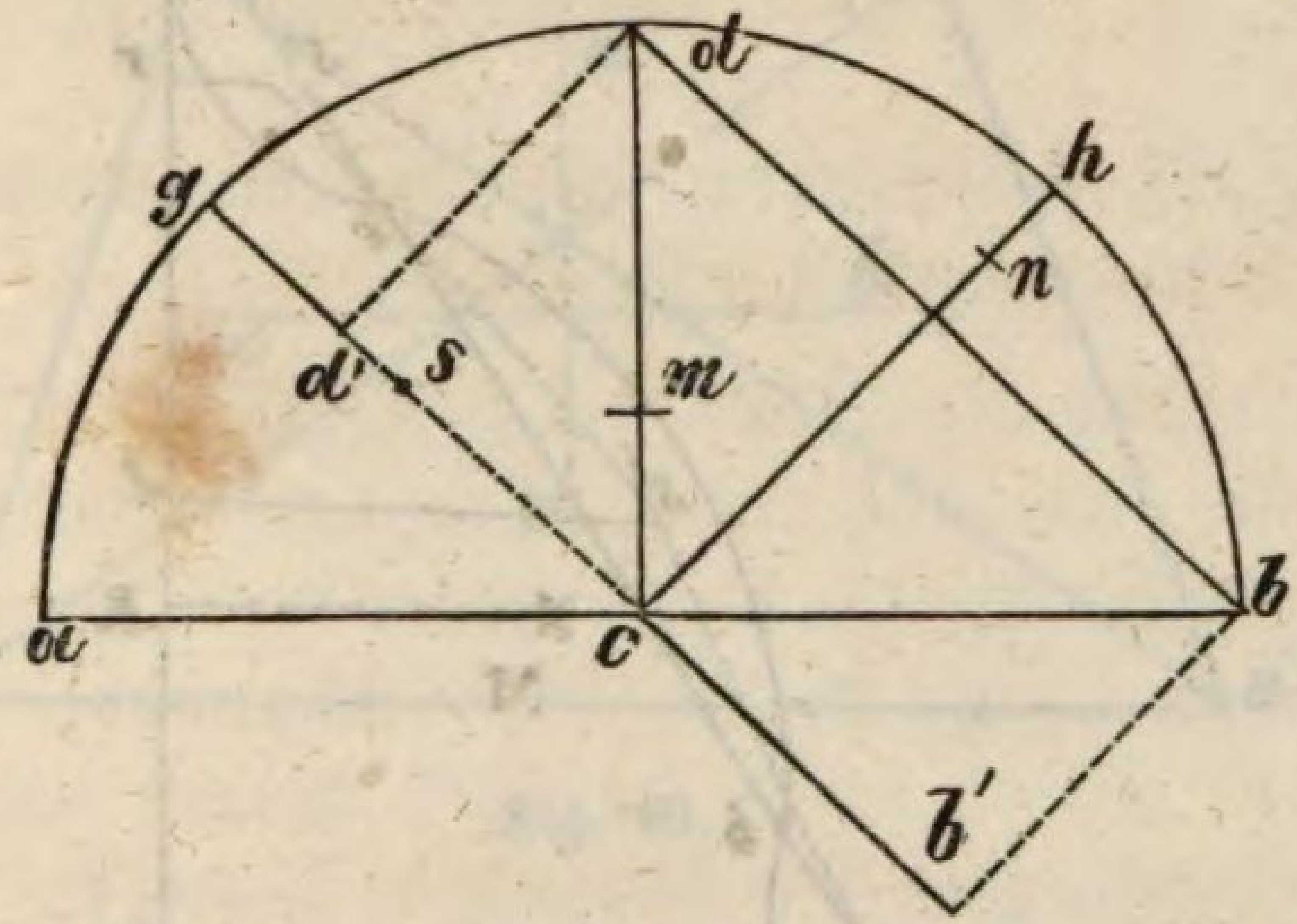


Fig. 37.

Quadrant sein, wird der Schwerpunkt auf folgende Weise bestimmt. Es sei der Radius cd = r; die Länge des Bogens bhd = b und die mit bd durch c gleichlaufende Sehne b'd' = s, so ist

$$94)\ cn = \frac{r \,.\, s}{b}.$$

171. Wie kann für jede andere krumme Linie, insofern eine genaue Zeichnung von ihr vorliegt, der Schwerpunkt annähernd bestimmt werden?

Es sei abcd, Fig. 38, die krumme Linie. Man zerlege sie bei b und c in Stücke, welche Kreisbogen ähneln, und suche deren Schwerpunkte s, s', s'' nach voriger Regel. Nachdem die Umdrehungsachse dB (Frage 177) gezogen ist, fälle man aus obigen Punkten s, s', s'' Senkrechte rs'', ts', vs auf sie. Weiter bestimme man näherungsweise die Länge der Bogen ab = P; bc = P'; cd = P'', so findet sich die Entfernung des gemeinschaftlichen Schwerpunktes M von der Umdrehungsachse nach der Formel:

$$95)\ MR = \frac{vs \,.\, P + ts' \,.\, P' + rs'' \,.\, P''}{P + P' + P''};$$

eine Formel, die auch für mehr als drei Punkte anwendbar ist.

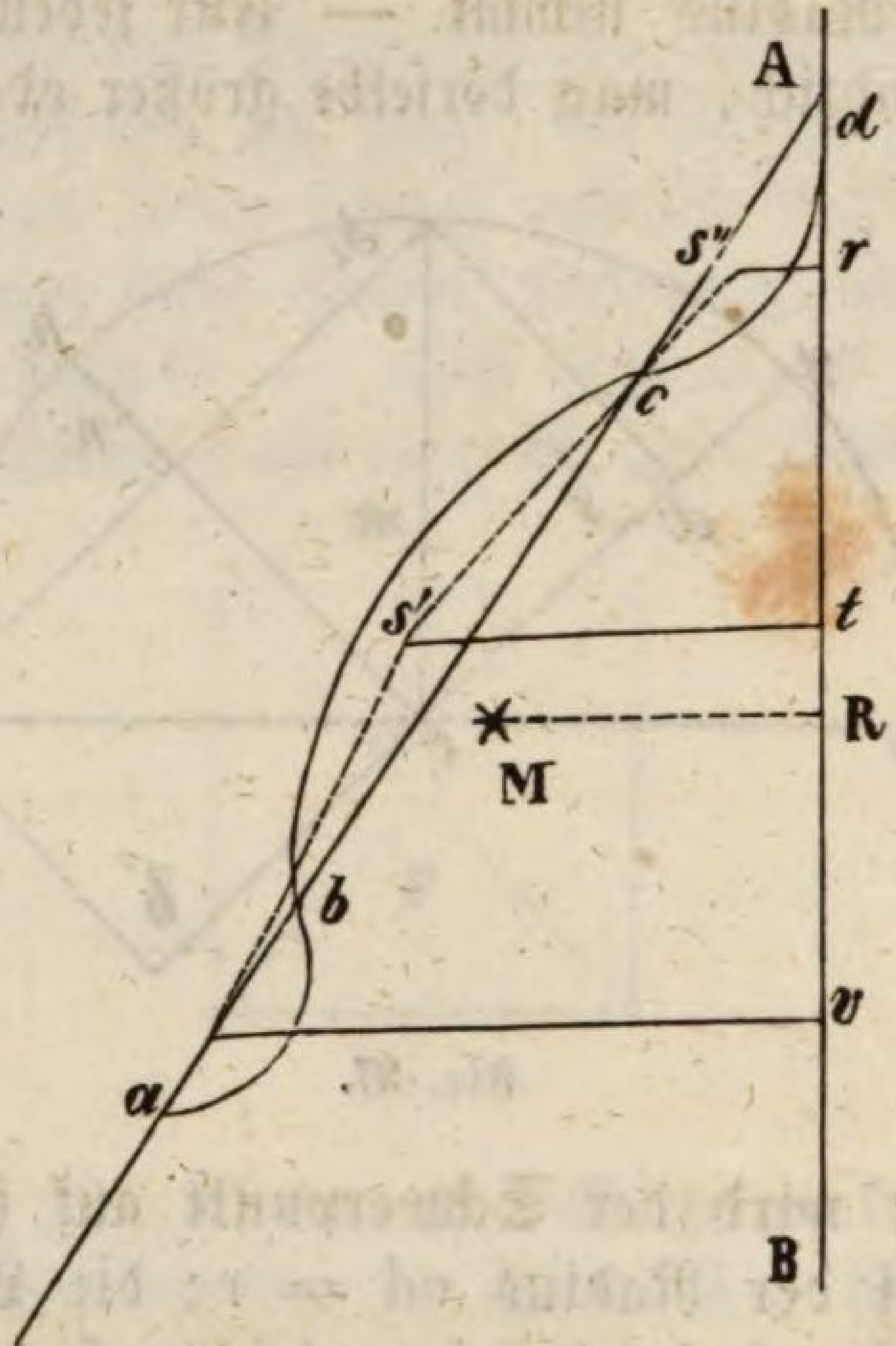


Fig. 38.

172. Wie wird der Schwerpunkt für das Dreieck, das Parallelogramm und das Trapez bestimmt?

Für das Dreieck abc, Fig. 39, wird der Schwerpunkt gefunden, wenn man eine Seite ac halbirt, den Halbirungspunkt e

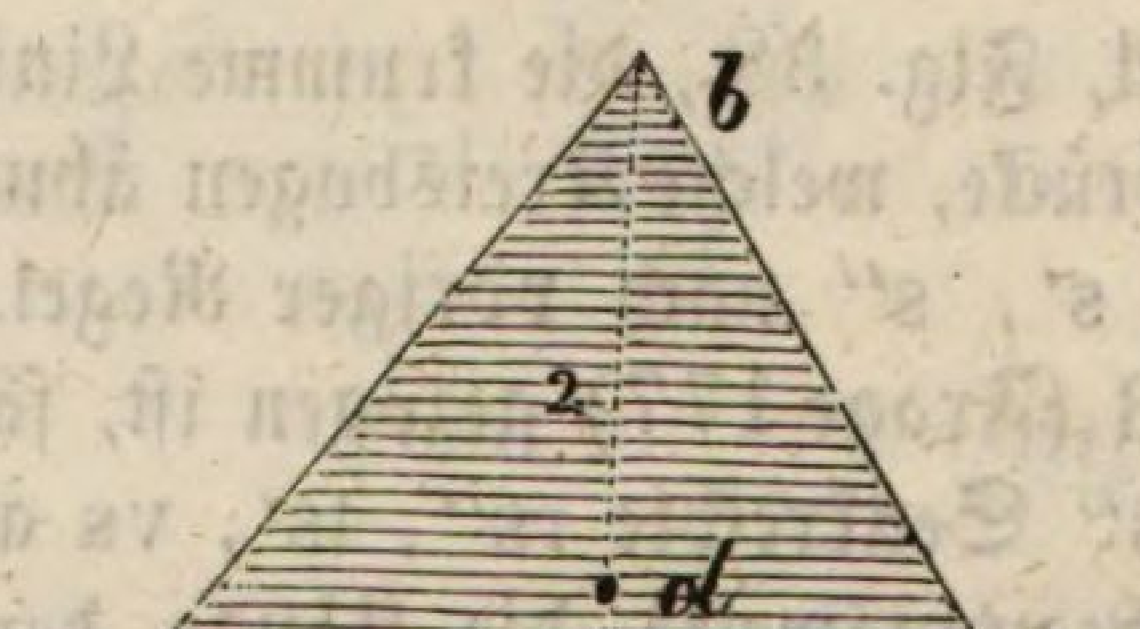


Fig. 39.

mit der gegenüberliegenden Spitze verbindet und ed = ⅓ eb aufträgt, wo sodann d der gesuchte Schwerpunkt ist. — Beim

Parallelogramm ist der Durchschnittspunkt beider Diagonalen auch der Schwerpunkt. — Für das Trapez, Fig. 40, findet man den Schwerpunkt, wenn man dasselbe durch die Diagonalen mo,

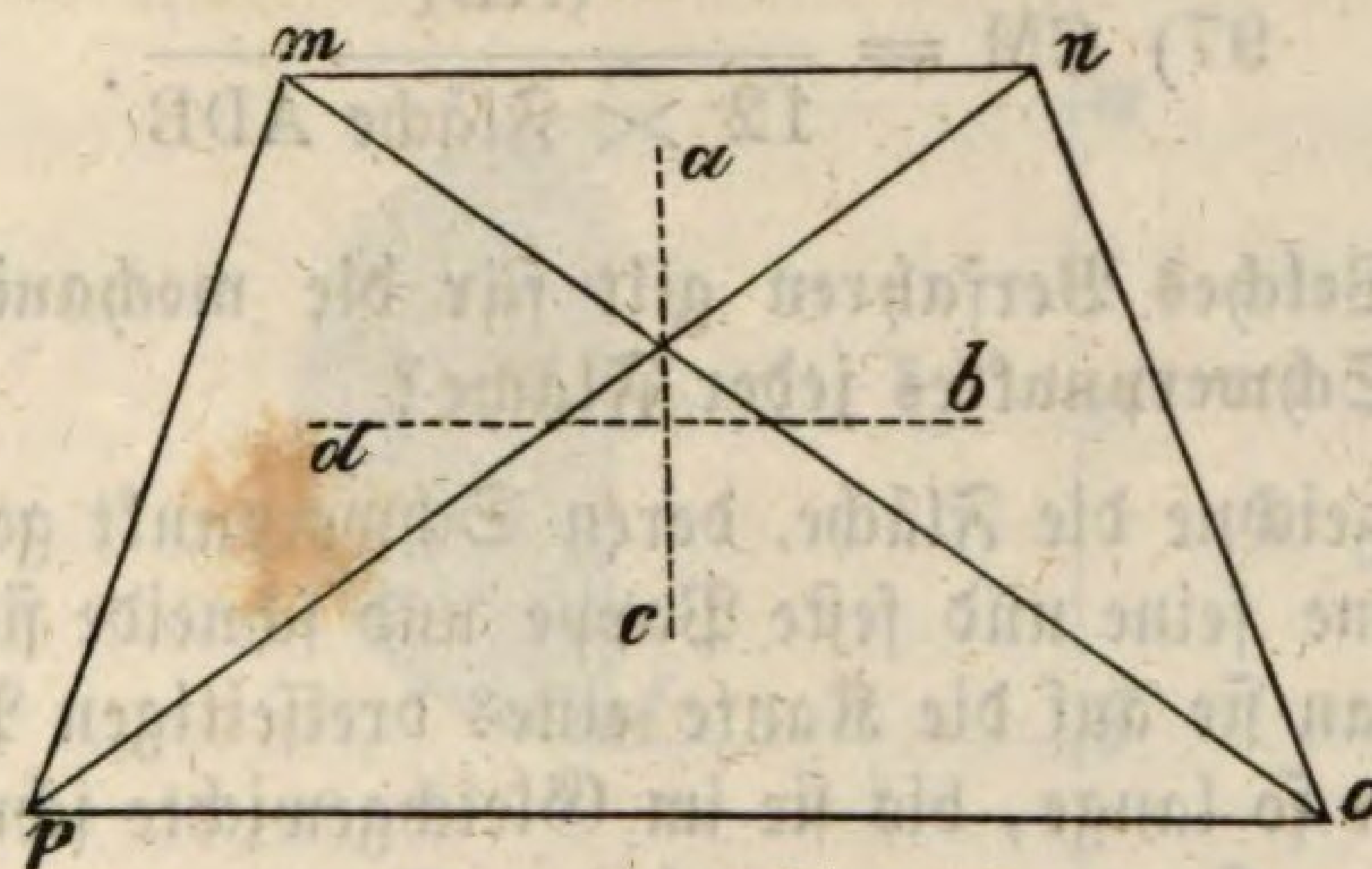


Fig. 40.

np in vier Dreiecke zerlegt, für jedes dieser Dreiecke den Schwerpunkt sucht und diese paarweise, d. i. b mit d und a mit c verbindet. Der Durchschnitt von ac, bd ist der Schwerpunkt.

173. Wie bestimmt man den Schwerpunkt für den Kreisausschnitt, Viertelkreis, Halbkreis und Kreisabschnitt?

Die Entfernung des Schwerpunktes M eines Kreisausschnittes ABC, Fig. 41, wird gefunden, wenn man ⅔ des Kreishalbmessers CD mit der Sehne AB multiplizirt und das Produkt durch die Länge des Bogens ADB dividirt, oder es ist

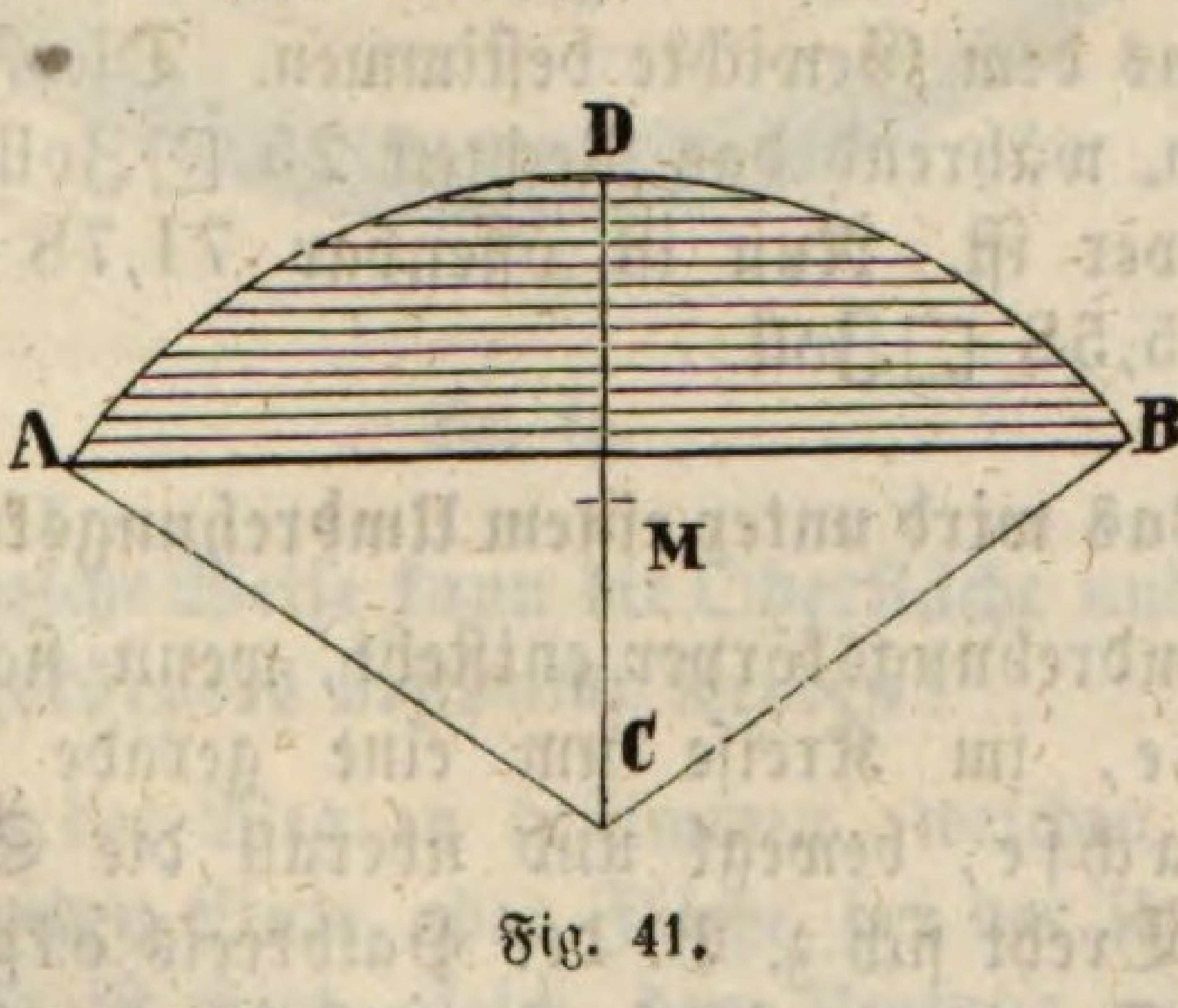


Fig. 41.

$$96)\ \mathrm{CM} = \frac{\frac{2}{3} . \mathrm{AC} \times \mathrm{AB}}{\text{Bogen ADB}}.$$

Für den Viertelkreis ist CM = 0,6002 Radius und für den Halbkreis = 0,4244 Radius. Für den Kreisabschnitt ADB hat man endlich:

$$97)\quad CM = \frac{(AB)^3}{12 \times \text{Fläche } ADB}.$$

174. **Welches Verfahren gilt für die mechanische Bestimmung des Schwerpunktes jeder Fläche?**

Man zeichne die Fläche, deren Schwerpunkt gesucht werden soll, auf eine feine und feste Pappe und schneide sie genau aus. Nun lege man sie auf die Kante eines dreiseitigen Prismas und verschiebe sie so lange, bis sie im Gleichgewichte schwebt, worauf die Lage der Kante genau auf der Pappe angezeichnet wird. Sodann verwende man die Pappe um ungefähr ¼ Umdrehung, bringe sie wieder ins Gleichgewicht und zeichne die Lage der Prismakante wieder genau an. Der Durchschnitt der ersten und der zweiten Kantenlage ist der gesuchte Schwerpunkt.

175. **Wie kann der Inhalt einer ganz unregelmäßigen Fläche mechanisch bestimmt werden?**

Die zu berechnende Figur wird genau auf eine gleichmäßige feine Pappe gezeichnet und ausgeschnitten, ebenso auch ein Rechteck von bestimmter Größe. Wiegt man nun beide Ausschnitte auf einer empfindlichen Wage, so läßt sich die gesuchte Fläche sehr leicht aus dem Gewichte bestimmen. Die Fläche wiege z. B. 217 Gramm, während das Rechteck 25 □Zoll mißt und 71,78 Gramm schwer ist. Nun ist offenbar 71,78 : 217 = 25 : x und x = 75,58 □Zoll.

176. **Was wird unter einem Umdrehungskörper verstanden?**

Ein Umdrehungskörper entsteht, wenn sich eine Fläche, die *erzeugende*, im Kreise um eine gerade Linie, die *Umdrehungsachse*, bewegt und überall die Spur ihres Weges zurückläßt. Dreht sich z. B. der Halbkreis efg, Figur 42, um den Durchmesser ef als Achse, so entsteht eine Kugel. Wird hingegen die Umdrehungsachse außerhalb des Halbkreises, z. B. in ab, angenommen, so bildet sich ein Ring, Fig. 43. In beiden

Fällen beschreibt der Schwerpunkt einen Kreis um die Umdrehungsachse.

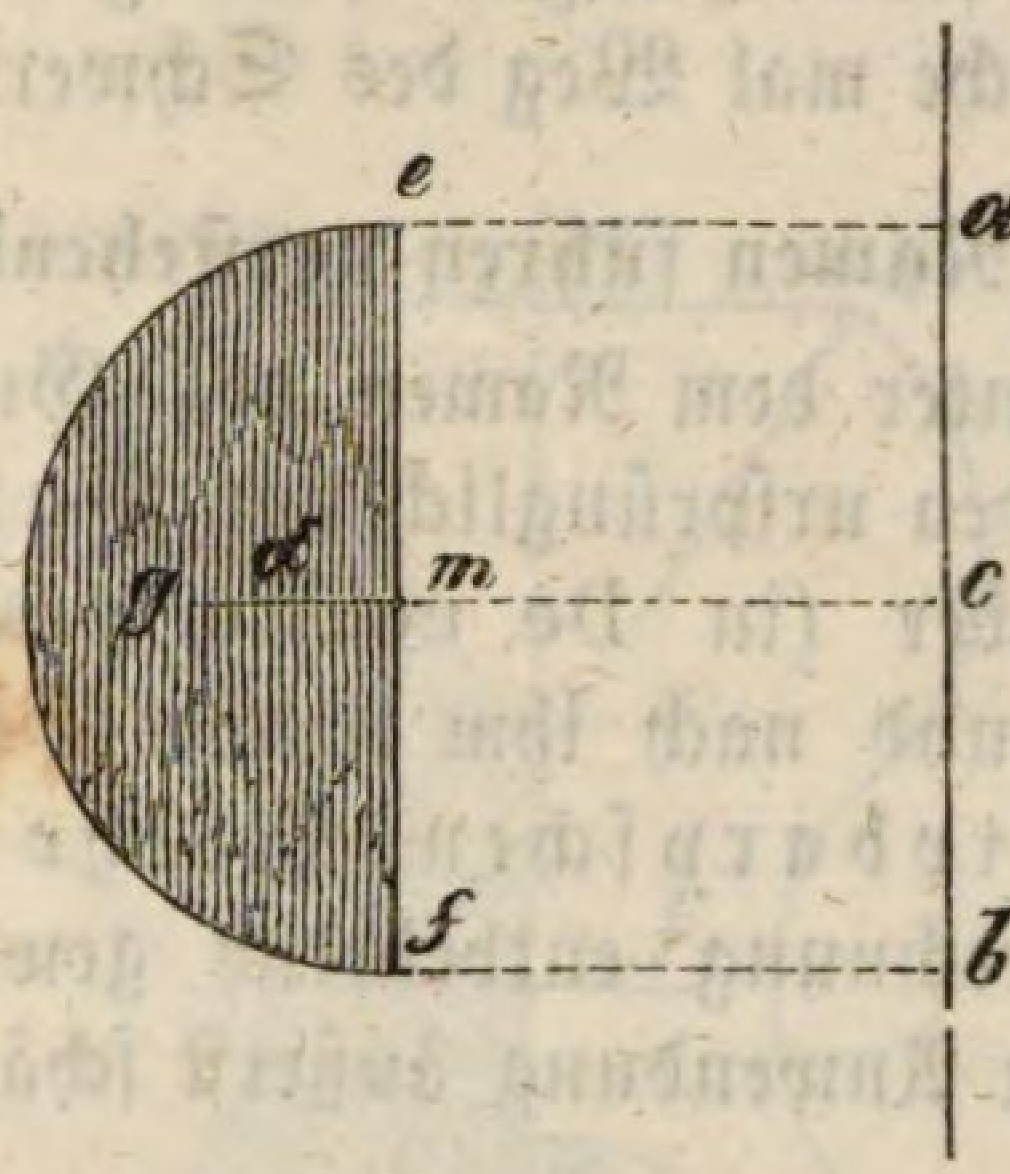


Fig. 42.

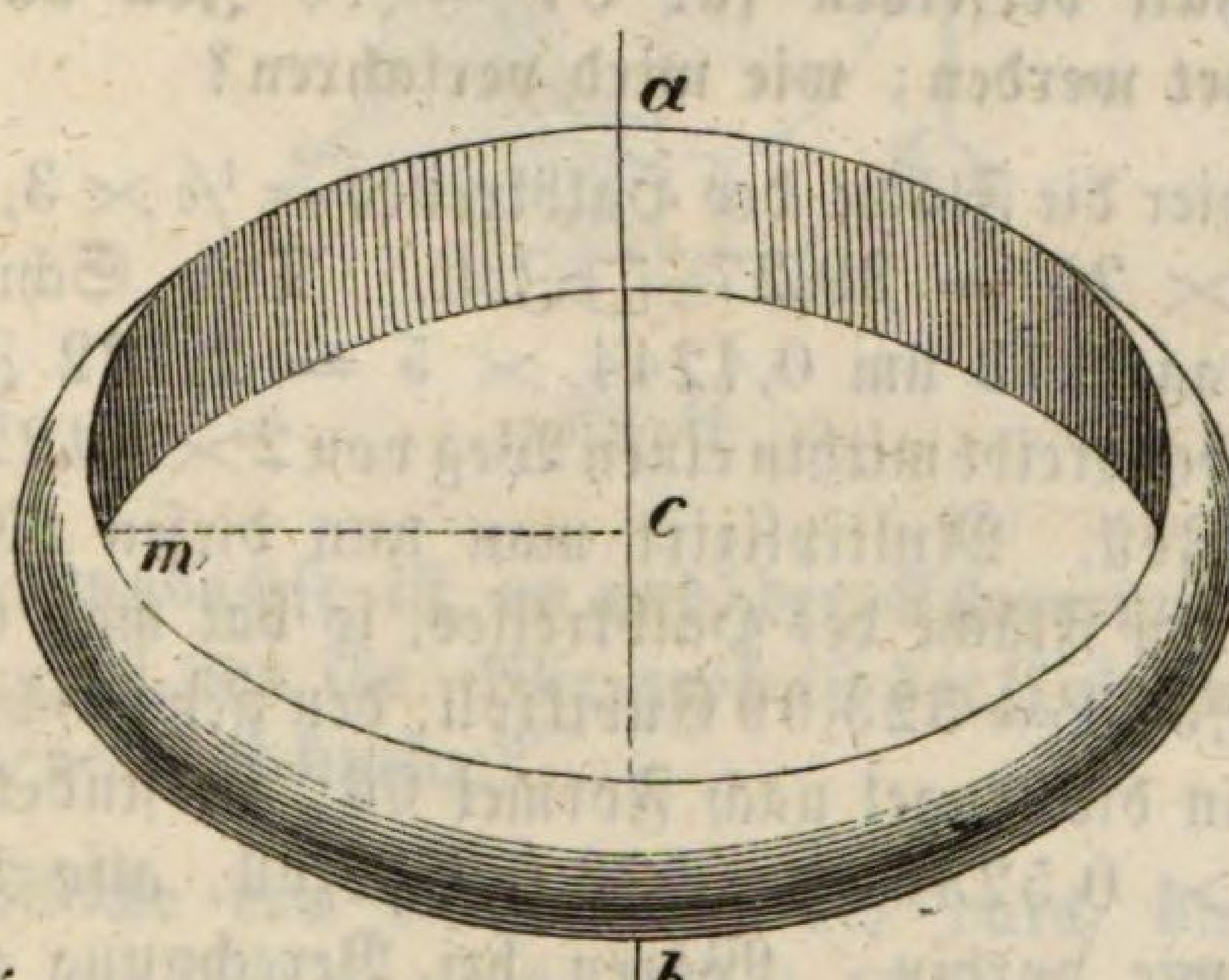


Fig. 43.

177. Auf welche Weise kann die Oberfläche und der Inhalt eines Umdrehungskörpers bestimmt werden?

Zunächst ist der Weg zu bestimmen, welchen der Schwerpunkt der erzeugenden Linie oder Fläche bei der Umdrehung beschreibt. Derselbe ist stets gleich dem Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser gleich der senkrechten Entfernung des Schwerpunktes von der Umdrehungsachse. Nun ist

98) Oberfläche des Umdrehungskörpers gleich der Länge der erzeugenden Linie mal den Weg des Schwerpunktes, und
99) Inhalt des Umdrehungskörpers gleich Inhalt der erzeugenden Fläche mal Weg des Schwerpunktes.

178. **Welchen Namen führen vorstehende Regeln?**

Beide sind unter dem Namen des Guldinschen Lehrsatzes bekannt. Sie wurden ursprünglich von Pappus gegeben, vom Jesuit Guldin aber (in De centro grav. Vindob. 1635) weiter ausgebildet und nach ihm benannt. Sie führen auch den Namen der centrobaryschen Methode. Obgleich jetzt durch die Integralrechnung entbehrlich geworden, sind sie doch wegen ihrer leichten Anwendung äußerst schätzbar.

179. **Der Halbkreis feg, Fig. 42, dreht sich um den Halbmesser ef als Achse und beschreibt dadurch eine Kugel. Es soll der Inhalt derselben für ef = 10 Zoll nach Guldins Satze berechnet werden; wie wird verfahren?**

Es ist hier die Fläche des Halbkreises $= \frac{1}{2} \times 3{,}1416 \times 5^2 = 1{,}5708 \times 25 = 39{,}27$ □ Zoll. Der Schwerpunkt d liegt nach Frage 173 um $0{,}4244 \times 5 = 2{,}122$ Zoll von m entfernt und beschreibt mithin einen Weg von $2 \times 2{,}122 \times 3{,}1416 = 13{,}343$ Zoll. Multiplizirt man nun diesen Weg mit der oben berechneten Fläche des Halbkreises, so hat man im Produkte $39{,}27 \times 13{,}343 = 523{,}99$ Cubikzoll, den gewünschten Inhalt. Berechnet man die Kugel nach Formel 66, so findet man ihren Inhalt $10^3 \times 0{,}5236$ oder 523,6 Cubzoll, also bis auf eine Kleinigkeit, wie vorhin. Wären bei Berechnung mehr Dezimalen genommen worden, so würde dieser Unterschied wegfallen.

180. **Der nämliche Halbkreis efg, Fig. 42, dreht sich um ab und erzeugt dadurch den Ring Fig. 43. Wie groß ist dessen Inhalt, wenn ef wieder 10 Zoll und der Abstand cd auch 10 Zoll ist?**

Die Fläche des Halbkreises ist wieder 39,27 □ Zoll, während der Weg des Schwerpunktes $20 \times 3{,}1416$ oder 62,832 Zoll beträgt. Das Produkt beider Zahlen = 2467,4 Cubikzoll ist der Rauminhalt des Ringes.

181. afbg Fig. 44 ist das Modell einer Erzeugungsfläche von 372 Gramm Gewicht und aus einer Pappe geschnitten, von welcher 20 Quadratzoll 45,7 Gramm wiegen.

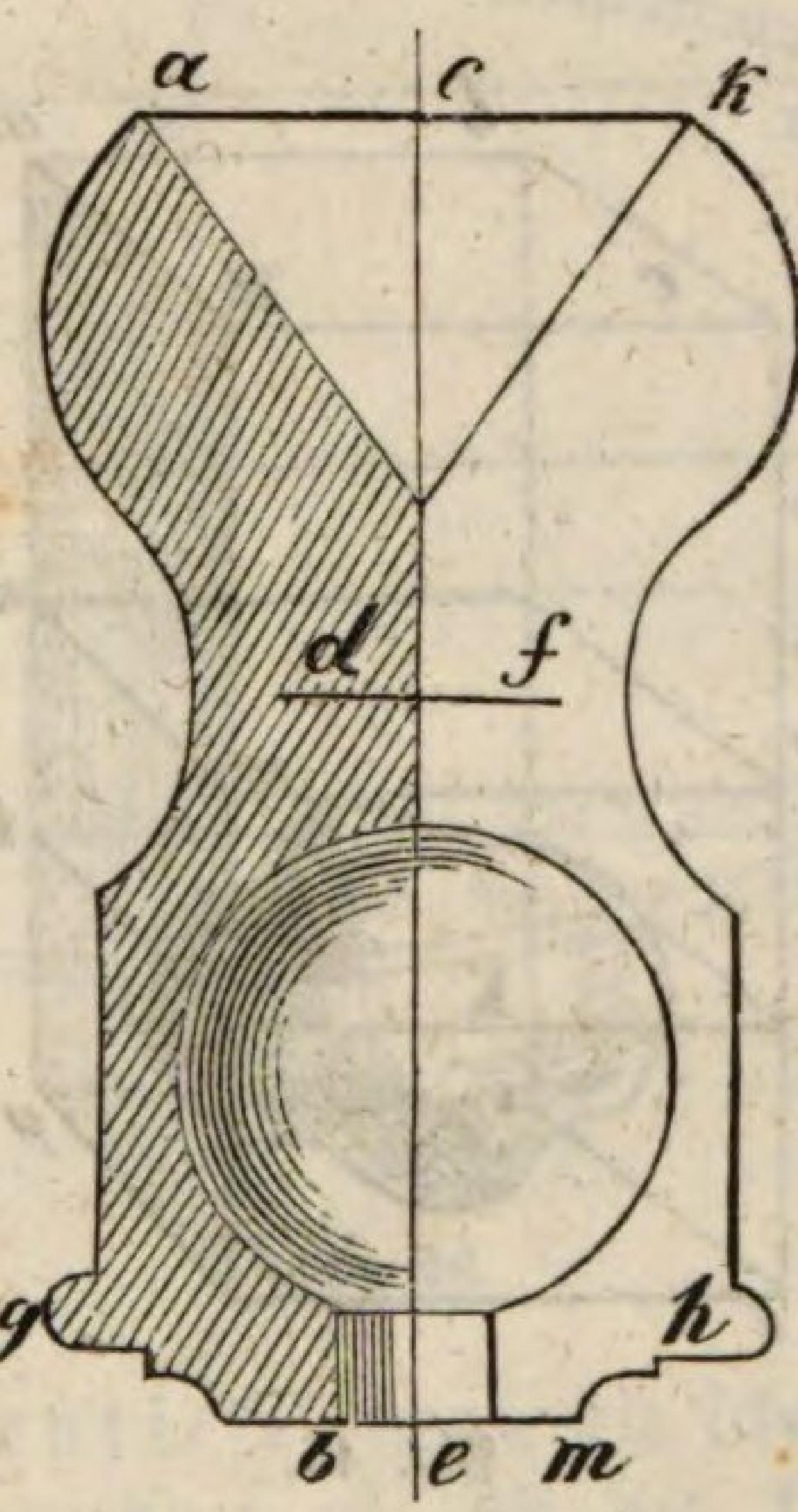


Fig. 44.

Die Umdrehungsachse ist ce und der Schwerpunkt d liegt um df = 9,5 Zoll von ihr. Wie groß ist der Cubikinhalt des Umdrehungskörpers akhmbg?

Die Fläche von afbg findet sich durch die Proportion 45,7 : 372 = 20 : x gleich 162,8 □ Zoll. Der Weg des Schwerpunktes beträgt $2 \times 9{,}5 = {}^{22}/_{7} = 59{,}7$ Zoll. Der Inhalt des Körpers ist also 9719 Cubikzoll.

182. Wie läßt sich der Inhalt eines Körpers mechanisch bestimmen?

Um den Rauminhalt eines ganz unregelmäßigen Körpers K, Fig. 45, zu bestimmen, lasse man sich ein prismatisches Gefäß abcdefg fertigen, in welches man den Körper legt und mit Wasser, Sand ꝛc. bedeckt. Wird nun der Körper aus dem Ge-

fäße genommen, so fällt die Umhüllung im Gefäße und es läßt sich aus dem Raume des Unterschiedes leicht die Größe des Körpers bestimmen. Hat z. B. das Gefäß 100 □Zoll Grundfläche und steht das Wasser über dem Körper bis el = 12 Zoll,

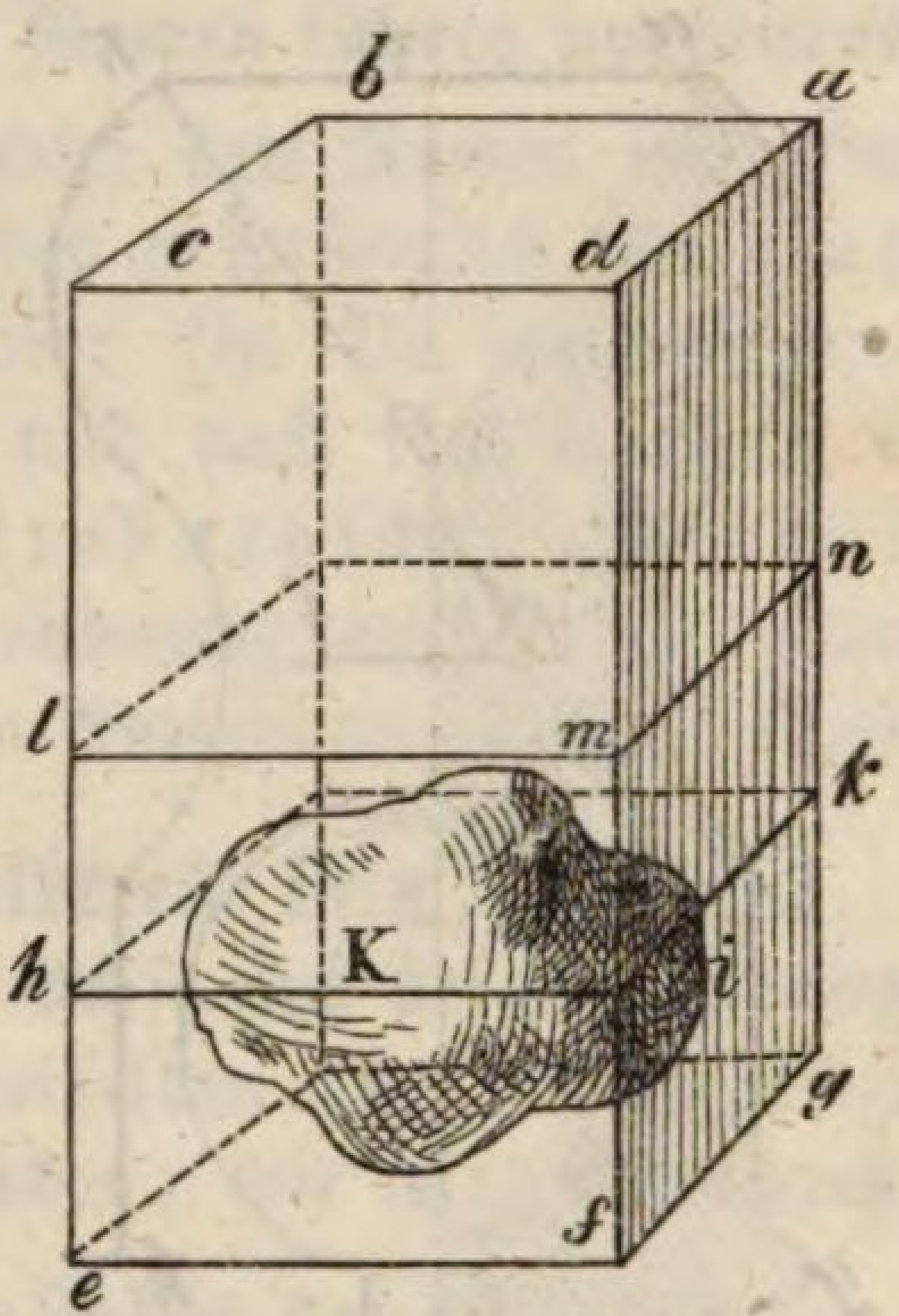


Fig. 45.

während es nach Entfernung desselben nur bis eh = 7,23 Zoll reicht, also 4,77 Zoll tiefer steht, so hat der Körper 4,77 × 100 = 477 Cubikzoll Inhalt.

Vierter Abschnitt.

Die Berechnung der Massgefäße.

183. **Was ist von der Beschaffenheit eines tonnenförmigen Gefäßes zu wissen nothwendig?**

In Fig. 46 ist der Längendurchschnitt einer Tonne vorgestellt, bei welchem die nach einem Kreisbogen, einer Ellipse,

Parabel, oder sonst einer krummen Linie gebogene, avb, die Faßlinie heißt. Die Linie hi wird die Achse; eq die Spund-

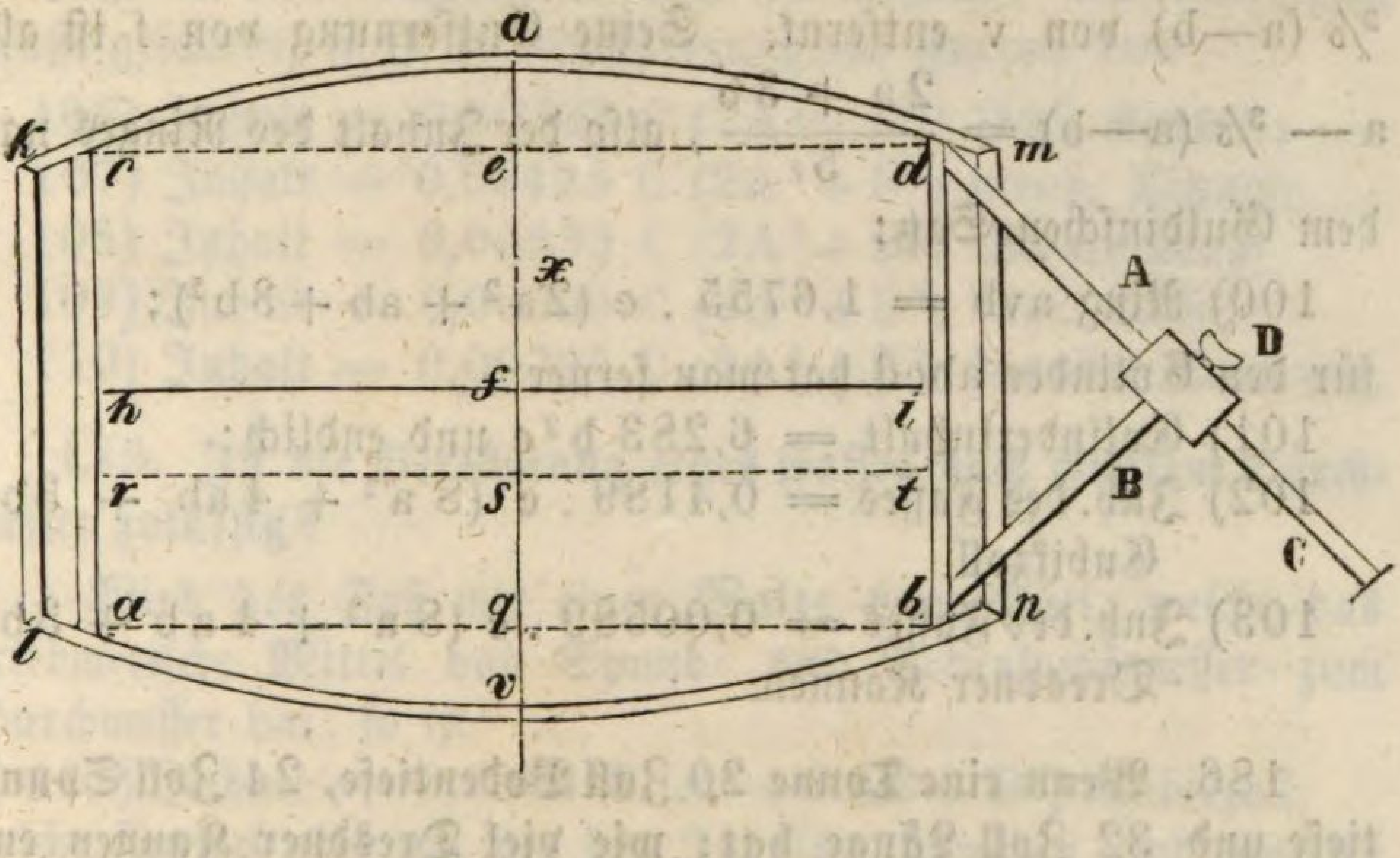


Fig. 46.

tiefe, ac die Bodentiefe, sowie die über den Boden hinausgehenden Daubenenden al, ck die Daubenköpfe oder Frösche genannt. Der Unterschied zwischen Spund- und Bodentiefe ist in der Regel ein aliquoter Theil der Daubenlänge, und wenn letztere = L, so wie der Durchmesser kl der Kopfenden = l genannt wird, so heißt das Verhältniß L:l das Fundamentalverhältniß des Fasses.

184. **Wodurch wird die Größe eines Fasses gemessen?**

Die Spundtiefe, so wie die Achsenlänge wird durch einen einfachen genauen Maßstab bestimmt. Zur genauen Messung der Bodentiefe wendet man häufig einen prismatischen Stab AC Fig. 46 an, an welchem sich die mit einer Preßschraube versehene Hülse D verschieben läßt. Mit letzterer ist der Arm B verbunden und AC ist so eingetheilt, daß die Entfernung der beiden Spitzen von A und B auf AC abgelesen werden kann.

185. **Wie ist ein Faß als Umdrehungskörper zu berechnen?**

Bildet die Faßlinie lvn, Fig. 46, nahezu eine Parabel

und ist $vf = a$; $ah = b$ und $hf = c$, so ist $ue = a - b$; $hi = 2c$ und Inhalt von $avb = \frac{2}{3} . cd . eu = \frac{4}{3} c (a-b)$. Der Schwerpunkt dieses Abschnittes liegt auf qv und zwar $\frac{3}{5} (a-b)$ von v entfernt. Seine Entfernung von f ist also $a - \frac{3}{5} (a-b) = \frac{2a + 3b}{5}$, also der Inhalt des Ringes nach dem Guldinschen Satz:

100) Ring $avb = 1,6755 . c (2a^2 + ab + 3b^2)$;

für den Cylinder abcd hat man ferner:

101) Cylinderinhalt $= 6,283\, b^2 c$ und endlich:

102) Inh. des Fasses $= 0,4189 . c (8a^2 + 4ab + 3b^2)$ Cubikzoll.

103) Inh. des Fasses $= 0,00589 . c (8a^2 + 4ab + 3b^2)$ Dresdner Kannen.

186. **Wenn eine Tonne 20 Zoll Bodentiefe, 24 Zoll Spundtiefe und 32 Zoll Länge hat; wie viel Dresdner Kannen enthält sie nach obiger Formel?**

Hier ist $a = 12$; $b = 10$; $c = 16$, also nach Formel 103 Inh. $= 0,00589 . 16 (8 . 144 + 480 + 3 . 100)$. Nach gehöriger Entwickelung der Parenthese und der Multiplikation findet sich der gesuchte Inhalt zu 182 Kannen.

187. **Wie wird ein Faß nach Lamberts Regel berechnet?**

Diese einfache Regel ist zugleich eine der genauesten (bis $\frac{1}{250}$ des Inhaltes) zur Berechnung tonnenförmiger Gefäße. Nach ihr ist das Faß gleich einer Walze von der Länge des Fasses und einem Durchmesser, welcher gleich ist $\frac{2}{3}$ Spund- und $\frac{1}{3}$ Bodendurchmesser desselben. Nennt man die Länge des Fasses $= C$, den Bodendurchmesser $= B$ und den Spunddurchmesser $= A$, so ist nach ihr:

104) Inhalt $= 0,0873\, C (4A^2 + 4AB + B^2)$ Cubikzoll.

Weniger genau (bis auf $\frac{1}{170}$ des Inhaltes) ist die Rechnung, wenn man das Faß gleich setzt einer Walze von der Faßlänge und einer Grundfläche, die aus $\frac{2}{3}$ Spund- und $\frac{1}{3}$ Bodenfläche des Fasses besteht. Nach obiger Bezeichnung ist hier

105) Inhalt $= 0,2618\, C (2A^2 + B^2)$ Cubikzoll.

188. Wie kann Lamberts Formel gestellt werden, daß sie den Inhalt sofort in Kannen angiebt?

Wenn die Messung in dem jedesmaligen landesüblichen Maße geschieht, so ist die Umänderung für Formel 105:

106) Inhalt = $0{,}00368\ C\ (2A^2 + B^2)$ sächs. Kannen;
107) Inhalt = $0{,}00428\ C\ (2A^2 + B^2)$ preuß. Quart;
108) Inhalt = $0{,}00339\ C\ (2A^2 + B^2)$ Wiener Maß;
109) Inhalt = $0{,}00609\ C\ (2A^2 + B^2)$ bayr. Maß;
110) Inhalt = $0{,}00395\ C\ (2A^2 + B^2)$ hannöv. Quartier.

189. Ist die Berechnung eines Fasses nach mittlem Durchmesser zulässig?

Wird das Faß mit einer Walze verwechselt, welche das arithmetische Mittel von Spund- und Bodendurchmesser zum Durchmesser hat, so ist

111) Inhalt = $0{,}1964\ C\ (A^2 + 2\,AB + B^2)$ Cubikzoll,

welche Formel aber um $^1/_{14}$ des Inhaltes abweicht und deshalb kaum anzuwenden ist. Obgleich zwar jede Berechnung dieser Art, selbst bei der sorgfältigsten Messung, unvermeidlicher Fehler halber immer nur eine Annäherung sein wird, so muß diese doch möglichst weit getrieben werden. Das Visiren auf nassem Wege, d. h. das Ausfüllen des Gefäßes nach Maßeinheiten ist gewöhnlich sehr zeitraubend und gewährt dabei eben auch keine größere Zuverlässigkeit, als wie eine scharfe Berechnung (Vergl. Fr. 218).

190. Wie viel Dresdner Kannen enthält ein Faß von 23 Zoll Bodendurchmesser, 28 Zoll Spunddurchmesser und 42 Zoll Länge nach Lambert?

Hier ist $A = 28$; $B = 23$; $C = 42$, also nach Formel 106:

Inhalt = $0{,}00368 . 42\ (2 . 28^2 + 23^2)$
= $0{,}15456\ (1568 + 529)$
= $0{,}15456 \times 2097$ oder 324,19 Kannen.

191. Wie viel preuß. Quart enthält ein andres Faß von 40″ Boden-, 50″ Spunddurchmesser und 60″ Länge?

Hier ist $A = 50$; $B = 40$ und $C = 60$, mithin nach Formel 107:

Inhalt $= 0{,}00428 . 60 \, (2 . 50^2 + 40^2)$
$= 0{,}2568 \, (5000 + 1600)$
$= 0{,}2568 \times 6600 = 1694{,}88$ Quart.

192. Ein Faß von 2 Ellen Länge mißt am Spunde = 1 ½ und am Boden = 1 ¼ Elle. Wie viel Cubikzoll faßt es nach Formel 104?

Hier ist A = 36 Zoll; B = 30 Zoll; C = 48 Zoll, mithin ist

Inhalt $= 0{,}0873 \, (4 . 36^2 + 4 . 36 . 30 + 30^2) \, 48$
$= 4{,}19 \, (5184 + 4320 + 900)$
$= 4{,}19 \times 10404 = 43593$ Cubikzoll.

193. Wie kann obiges Faß nach Lamberts Regel ohne Beihilfe der Formel berechnet werden?

Es ist ⅔ Spunddurchmesser = ⅔ . 36 = 24 Zoll; ⅓ Bodendurchmesser = ⅓ . 30 = 10 Zoll; ferner 24 + 10 = 34 Zoll Durchmesser der dem Fasse entsprechenden Walze von 48 Zoll Länge. Mit der Verhältnißzahl $\frac{11}{14}$ gerechnet (Fr. 116) hat man nun $34 \times 34 = 1156$; $1156 \times 48 = 55488$ und dieß $\times \frac{11}{14} = 43598$ Cubikzoll; also nur 5 Cubikzoll oder $\frac{1}{8719}$ mehr, als in Fr. 193.

194. Welche Formeln dienen außer den vorigen noch zur Berechnung eines Fasses?

Prof. Grunert*) giebt folgende Formel, in welcher die Länge der Tonne = 2a, der Bodendurchmesser = 2c und der Spunddurchmesser = 2b ist:

112) Inh. $= \frac{2}{3} (2 a b^2 \pi) + \frac{1}{3} (a c^2 \pi) - \frac{2}{15} (2a [b-c]^2 \pi)$, wenn noch π wie gewöhnlich die Verhältnißzahl 3,1416 bezeichnet. Noch genauer soll sein:

113) Inh. $= 2 a \pi$

$$\left\{ \frac{2}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{2}{15} (b-c)^2 + \frac{2}{15} \left(\frac{b-c}{a}\right)^2 (b^2 - c^2) \right\}.$$

Nach der Bezeichnung in Fr. 188 hat man ferner:

*) Dinglers Polyt. Journal Bd. CXXX, Heft 4.

114) Inhalt $= \frac{11C(10A^2 + 5B^2 - 2(A-B)^2)}{210}$;

115) Inhalt $= \frac{11C(8A^2 + 4AB + 3B^2)}{210}$;

116) Inhalt $= \frac{11C(4A^2 + 4AB + B^2)}{126}$;

117) Inhalt $= \frac{11C(15A^2 - 10A(A-B) + 5(A-B)^2)}{210}$;

118) Inhalt $= \frac{11C(15A^2 - 10A(A-B) + 3(A-B)^2)}{210}$;

119) Inhalt =

$$3{,}1416 . C[\tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{6}A(A-B) + \tfrac{1}{20}(A-B)^2],$$

bei parabolischer Daubenkrümmung;

120) Inhalt =

$$3{,}1416 . C[\tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{6}A(A-B) + \tfrac{1}{12}(A-B)^2],$$

bei elliptischer Daubenkrümmung;

121) Inhalt $= 0{,}1309 . C(B^2 + 4M^2 + A^2)$,

wenn M den mittlen Durchmesser $= \frac{A+B}{2}$ bezeichnet.

195. **Wodurch läßt sich die Berechnung eines Gefäßes ungemein erleichtern?**

Dadurch, daß man für das landesübliche Längen- und Hohlmaß eine Hilfstafel berechnet, welche die Rauminhalte von Walzen bei 1 Zoll, Centimeter oder dergleichen Höhe für die Durchmesser von 1, 2, 3, 4 u. s. f. in Kannen, Litres oder einem andern Maße angiebt. Die Berechnung eines Gefäßes wird durch Hilfe dieser Tafel sodann fast auf eine bloße Multiplikation beschränkt.

196. **Wie ist eine solche Hilfstafel für sächsisches Maß beschaffen?**

D.	φ.	d.	D.	φ.	d.	D.	φ.	d.
12	1,589	27,6	42	19,462	93,8	72	57,195	160,0
13	1,856	29,8	43	20,400	96,0	73	58,795	162,2
14	2,163	31,9	44	21,360	98,2	74	60,417	164,4
15	2,482	34,2	45	22,342	100,4	75	62,061	166,6
16	2,824	36,5	46	23,346	102,6	76	63,727	168,0
17	3,189	38,6	47	24,372	104,8	77	65,415	171,0
18	3,575	40,8	48	25,420	107,0	78	67,125	173,5
19	3,983	43,0	49	26,490	109,3	79	68,860	175,1
20	4,413	45,2	50	27,583	111,4	80	70,611	177,7
21	4,865	47,5	51	28,697	113,6	81	72,388	179,8
22	5,340	49,6	52	29,833	115,9	82	74,186	182,0
23	5,836	51,9	53	30,992	118,0	83	76,006	184,3
24	6,355	54,1	54	32,172	120,3	84	77,849	186,4
25	6,896	56,2	55	33,375	122,5	85	79,713	188,7
26	7,485	58,5	56	34,600	124,6	86	81,600	190,9
27	8,043	60,7	57	35,846	126,9	87	83,509	193,1
28	8,650	62,9	58	37,115	129,1	88	85,440	195,2
29	9,279	65,1	59	38,406	131,3	89	87,392	197,5
30	9,930	67,3	60	39,719	133,5	90	89,367	199,7
31	10,603	69,5	61	41,054	135,7	91	91,364	201,9
32	11,298	71,7	62	42,411	137,9	92	93,383	204,1
33	12,015	73,9	63	43,790	140,1	93	95,424	206,4
34	12,754	76,1	64	45,191	142,3	94	97,488	208,4
35	13,515	78,4	65	46,614	144,6	95	99,573	210,7
36	14,299	80,5	66	48,060	146,7	96	101,680	213,0
37	15,104	82,8	67	49,527	149,0	97	103,810	215,1
38	15,932	84,9	68	51,017	151,1	98	105,961	219,6
39	16,781	87,2	69	52,528	153,4	99	108,134	221,8
40	17,653	89,4	70	54,062	155,6	100	110,330	
41	18,547	91,5	71	55,617	157,8			

197. Wie ist vorgehende Tafel zu verstehen?

Dieselbe enthält in der mit D überschriebenen Spalte die Durchmesser der Kreise (Faßboden) von 12 — 100 Zoll; unter

φ befinden sich die in Frage 196 erwähnten Rauminhalte in Dresdner Kannen, und unter d sind die zur Interpolation für $1/10$ Zolle des Durchmessers nöthigen Differenzen. Nach dieser Tafel hat z. B. eine Walze von 1 Zoll Höhe und 89 Zoll Durchmesser = 87,392 Dresdner Kannen Inhalt und der Inhalt einer andern Walze von eben diesem Durchmesser und 10 Zoll Höhe ist $87{,}392 \times 10 = 873{,}92$ Kannen.

198. **Auf welche Weise ist die Interpolation für $1/10$ Zolle zu vollziehen?**

Es sei φ für den Durchmesser 31,7 Zoll zu suchen. Nach der Tafel ist Inhalt für 31 Zoll = 10,603 Kannen,
hierzu 7mal Differenz 69,5 ... = 4865 „

Inhalt für 31,7 Zoll = 11,09 Kannen.

Zu bemerken ist hierbei, daß die Differenz stets in den letzten Dezimalen von φ gegeben ist.

Ferner findet sich der Inhalt für 21,3 Zoll Durchmesser, wie folgt:

φ für 21 Zoll nach der Tafel = 4,865 K.
3 × Diff. 47,5 . . . = 143 „

Inhalt für 21,3 Zoll = 5,008 K.

Endlich für 17,5 Zoll Durchmesser:

φ für 17 Zoll . . . . . = 3,189 K.
5 × Diff. 38,6 . . . . . = 193 „

Inhalt für 17,5 Zoll = 3,382 K.

199. **Wie wird diese Tafel nach Lamberts Regel zur Berechnung der Tonnen angewendet?**

Es sei der Inhalt eines Fasses von 40 Zoll Länge, 30 Zoll Spund- und 24 Zoll Bodendurchmesser zu berechnen. Nach Lambert ist nun

$$2/3 \times 30 = 20 \text{ Zoll};$$
$$1/3 \times 24 = 8 \text{ „}$$

Durchmesser = 28 Zoll.

Dafür ist φ = 8,65 und mithin der Inhalt des Fasses = $8{,}65 \times 40$ oder 346 Dr. Kannen.

Ferner findet sich der Inhalt eines Fasses von 37 ½ Zoll Länge, 29 ¾ Zoll Spund- und 23 ⅓ Zoll Bodendurchmesser, wie folgt:

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{3} \times 29\tfrac{3}{4} &= 19{,}8 \text{ Zoll}, \\ \tfrac{1}{3} \times 23\tfrac{1}{3} &= 7{,}8 \text{ „} \\ \hline \text{Durchmesser} &= 27{,}6 \text{ Zoll}. \end{aligned}$$

Nun ist φ für 27 Zoll . . . = 8,043
für 0,6 Zoll = 6 × 60,7 . . . = 364

φ = 8,407

und Inhalt des Fasses = 37,5 × 8,407 oder 315,26 Kannen.

200. Auf welche Weise lassen sich kegelförmige Gefäße durch Hilfe dieser Tafel nach dem mitteln Durchmesser berechnen?

Es sei der untere Durchmesser eines solchen Fasses = 22 Zoll, der obere = 20 Zoll und die Höhe ebenfalls 20 Zoll. Der mittle Durchmesser ist hiernach 21 Zoll und dafür φ = 4,865, mithin der Inhalt = 4,865 × 20 oder 97,3 Kannen.

201. Wie kann der auf diese Weise gefundene, stets zu kleine Inhalt berichtiget werden?

Nennt man die beiden Faßdurchmesser D, d, so ist der Unterschied zwischen dem als Walze berechneten und dem wahren Inhalte

122) $\psi = 0{,}0009194\ (D - d)^2 \times$ Länge (Kannen).

Hiernach ist folgende Correktionstafel berechnet worden:

D-d	ψ	d	D-d	ψ	d	D-d	ψ	d
1	0,001	0,3	9	0,075	1,7	17	0,266	3,2
2	0,004	0,4	10	0,092	1,9	18	0,298	3,4
3	0,008	0,7	11	0,111	2,1	19	0,332	3,6
4	0,015	0,8	12	0,132	2,3	20	0,368	3,8
5	0,023	1,0	13	0,155	2,5	21	0,406	3,9
6	0,033	1,2	14	0,180	2,7	22	0,445	4,1
7	0,045	1,4	15	0,207	2,8	23	0,486	4,4
8	0,059	1,6	16	0,235	3,1	24	0,530	

202. **Wie ist die Anwendung dieser Tafel?**

Ein Beispiel wird das Verfahren deutlich machen. Es habe ein Faß unten 80 Zoll und oben 76,4 Zoll Durchmesser, so wie 63 Zoll Höhe. Hier ist also D = 80; d = 76,4; $\frac{D + d}{2} = \frac{80 + 76,4}{2} = \frac{156,4}{2} = 78,2$; D—d = 3,6; also:

für 78 Zoll φ	. . . =	67,125
„ 2 $\times$ 173,5	. . . =	357
für 78,2	. . . . . =	67,482
Hierzu ψ für 3,6	. . . . . =	0,012
Der richtige Factor also	=	67,494

und das Faß = 67,494 $\times$ 63 = 4252 Kannen.

Wenn weiter ein zweites Faß unten 47,2 Zoll, oben 54,6 Zoll mißt und 56 Zoll hoch ist, so hat man $\frac{D + d}{2} = \frac{47,2 + 54,6}{2} = \frac{101,8}{2} = 50,9$; D—d = 7,4 und daraus

φ für 50	. . . . =	27,583
φ „ 0,9 = 111,4 $\times$ 9	. =	1,003
ψ „ 7,4	. . . . =	0,050
der richtige Factor	=	28,636

und das Faß = 28,636 $\times$ 54 oder 1546 Kannen.

203. **Wie kann ein Oval genau berechnet werden?**

Nach der in Frage 167 angegebenen Construction ist, wenn ac Fig. 31 = α; cn = nα und n = $\frac{nc}{ac}$,

123) Inhalt = $\alpha^2 \frac{(51 - 72\,n + 48\,n^2)\pi - 96(1-n)^2 \sqrt{3}}{27}$ Cubikzoll,

124) Inhalt = α^2
$[(51\text{-}72\,n + 48n^2)\,0,00163452\text{-}(1\text{-}n)^2 0,086511]$ Dr. K.

Um hierbei die mühsame Rechnung zu erleichtern, kann man den Werth der Parenthese für n von 0,20 bis 0,99 für jedes Hundertheil berechnen und als φ in eine Hilfstafel eintragen.

204. **Welche Zahlenwerthe enthält diese Tafel?**

Es sind folgende:

n	φ	d	n	φ	d	n	φ	d	n	φ	d
0,20	0,00756		0,40	0,01770		0,60	0,02716		0,80	0,03597	
21	00808		41	01820		61	02762		81	03640	
22	00860		42	01869		62	02807		82	03682	
23	00912		43	01918		63	02852		83	03724	
24	00963		44	01967		64	02897		84	03766	
25	01015		45	02015		65	02942		85	03808	
26	01066		46	02063		66	02987		86	03850	
27	01116		47	02111		67	03032		87	03892	
28	01167		48	02158		68	03076		88	03933	
29	01218	5	49	02205	5	69	03120	4	89	03974	4
30	01269		50	02251		70	03164		90	04015	
31	01319		51	02298		71	03208		91	04055	
32	01369		52	02345		72	03252		92	04095	
33	01419		53	02392		73	03296		93	04135	
34	01469		54	02439		74	03339		94	04175	
35	01520		55	02486		75	03382		95	04215	
36	01570		56	02532		76	03425		96	04255	
37	01620		57	02578		77	03468		97	04295	
38	01670		58	02624		78	03511		98	04334	
39	01720		59	02670		79	03554		99	04373	

205. **Auf welche Weise wird diese Tafel gebraucht?**

Es habe ein ovales Gefäß folgende Dimensionen:

oben: Länge = 66 Zoll; Breite = 42 Zoll;
unten: „ = 58 „ ; „ = 38 „ ;
Höhe = 20 Zoll,

so findet sich: mittle Länge = 62 Zoll, mittle Breite = 40 Zoll, also auch (Fr. 204) $\alpha = 31$; $\alpha^2 = 961$; $n = \frac{40}{62} = 0,645$. Nun ist nach der Tafel

für n = 0,64 . . . . . . φ = 0,02897
Diff. f. 0,005 = 0,005 × 4 = 20

φ = 0,02917
multiplizirt durch α^2 = 961

2917
1 7502
26 253

28,03237 K. (A)

für 1 Zoll Höhe, also für 20 Zoll Höhe = 560,6474 Kan. (B).

206. Wie kann durch Hilfe dieser Tafel die Grundfläche des Ovals nach Quadratzollen und der Inhalt nach Cubikzoll gefunden werden?

Der Flächeninhalt des Bodens wird gefunden, wenn man die Zahl A, Fr. 206 — der Rauminhalt hingegen, wenn man die Zahl B durch 71,1862 multiplizirt. Diese Rechnung ist richtig, gleichviel, in welchem Maße gemessen wurde, und erhält man sowohl Fläche als Rauminhalt stets in demselben Maße. Wurde also das Faß in Dresdner Zoll gemessen, so kommt die Fläche in Quadratzoll und der Inhalt in Cubikzoll sächsisch; wurde in rheinischen Zoll gemessen, so erscheinen Fläche und Rauminhalt in eben diesem Maße; wurde nach Dezimetern gemessen, so erhält man die Fläche in Quadrat- und den Inhalt in Cubikdezimetern, und so in allen andern Fällen.

207. Bei einem ovalen Fasse hat man in rheinischem Maße gemessen: oben 40″ Länge, 36″ Breite; unten 38″ Länge, 34″ Breite; Höhe 10 Zoll: wie groß ist die mittle Fläche in Quadrat- und der Rauminhalt in Cubikzollen?

Hier ist die mittle große Achse = 39 Zoll; die mittle kleine = 35 Zoll; α = 19,5; α^2 = 380,25; n = 35/39 = 0,899; mithin hat man auch:

φ für n = 0,89 . .	=	0,03974
Correktion für φ = 0,009	=	36
φ für 0,899	=	0,04010
multiplizirt durch α^2 . .	=	380,25
		38025
		15 2100
		15,248025

Diese 15,248 × 71,19 giebt die Grundfläche des mitteln Ovals = 1085,505 Quadratzoll, und diese Fläche durch die Höhe = 10 multiplizirt den Rauminhalt = 10855 Cubikzoll rhein.

208. **Eine Tonne mit ovalem Boden mißt am Spunde 40 Zoll und 36 Zoll, am Boden 34 Zoll und 28 Zoll. Wenn sie nun 60 Zoll lang ist, wie viel Dresdner Kannen faßt sie nach Lamberts Regel?**

Es finden sich die Spund- und Bodenfläche auf folgende Weise:
Am Spunde ist $\alpha = 20$; $\alpha^2 = 400$; n = $^{36}/_{40}$ = 0,9; $\varphi = 0{,}04015$; Fläche = 0,04015 × 400 . . = 16,06.
Am Boden ist $\alpha = 17$; $\alpha^2 = 289$; n = $^{28}/_{34}$ = 0,824; $\varphi = 0{,}03698$; Fläche = 0,3698 × 289 = 10,69.

Nach Lamberts Regel, Formel 105, ist nun:

$^2/_3$ Spundfläche = $^2/_3$ × 16,06	=	10,7
$^1/_3$ Bodenfläche = $^1/_3$ × 10,69	=	3,56
Summa	=	14,26
mal Länge	=	60
Inhalt	=	855,6 Dr. K.

209. **Bei großen Tonnen ist oft auch der Boden gewölbt, wie ist hier zu rechnen?**

Weil die Wölbung des Bodens nicht nach geometrischer Linie sein kann, und weil ferner durch sie nicht eine große Differenz zu entstehen vermag, so ist es in solchen Fällen am einfachsten, durch Messung die mittle Faßlänge zu bestimmen und nach

dieser das Faß zu berechnen. Die Praxis lehrt übrigens bald die richtigen Verhältnisse zu finden.

210. **Ein großes tonnenförmiges Faß ist nicht mehr ganz gefüllt; weil aber sein Inhalt nicht auf nassem Wege gesucht werden kann, so soll er berechnet werden. Wie ist das Verfahren hierzu?**

Zuerst ist das Faß in horizontale Lage zu bringen. Nun sei Fig. 46, Frage 184, rt der Spiegel der Flüssigkeit und es messe uv = 36″; ca = 32″; sv = 14″; hi = 50. Die Höhe ra kann nicht unmittelbar gemessen werden, sie läßt sich aber leicht berechnen. Es ist nämlich qv gleich dem Unterschiede zwischen dem halben Spund- und Bodendurchmesser, also in unserm Beispiele = 18 — 16 = 2 Zoll. Weiter ist aber ra = rs = sv — qv = 14″ — 2″ oder 12 Zoll. Nun berechnet man die Kreissegmente für Spund- und Bodendurchmesser (Fr. 103 u. f.), nimmt von ersterem $^2/_3$ und von letzterem $^1/_3$ und multiplizirt deren Summe durch die Länge des Fasses. Nun ist die Fläche des Spundkreises = 36 × 36 × $^{11}/_{14}$ = 1018,27 □Zoll; n für die Tafel in Frage 103 = $^{14}/_{36}$ = 0,389; die Abschnittfläche also 1018,27 × 0,35984 = 366,4 □Zoll und davon $^2/_3$ = 244,3 □Zoll. Eben so ist für die Bodenfläche: Inhalt = 32 × 32 × $^{11}/_{14}$ = 804,57 □Zoll; n = $^{12}/_{32}$ = 0,375; der Kreisabschnitt = 804,57 × 0,34252 = 275,6 □Zoll und davon $^1/_3$ = 91,9 □Zoll. Nun hat man

$^2/_3$ Abschnitt am Spunde	=	244,3	□Zoll
$^1/_3$ „ „ Boden	=	91,9	„
Summa	=	336,2	□Zoll
multiplizirt durch die Länge	=	50	
Inhalt des Fasses	=	16810	Cubikzoll

oder 236 Kannen.

211. **Wie ist die Rechnung für voriges Beispiel, wenn der Inhalt unmittelbar in sächs. Kannen gesucht wird?**

Es war am Spunde der Durchmesser 36 Zoll, wozu aus Tafel Frage 197 der Faktor φ = 14,299 gehört. Diesen

mal der Verhältnißzahl F, Frage 103 = 0,36 × ⅔ giebt 14,299 × 0,24 oder 3,432.

Am Boden ist der Durchmesser 32 Zoll, hierzu gehört φ = 11,298. Diesen mal ⅓ der Verhältnißzahl F in Frage 103 = ⅓ . 0,343 giebt 1,292.

Nun ist 3,432 + 1,292 = 4,724 und diese Zahl durch die Faßlänge 50 multiplizirt giebt den Rauminhalt = 236,2 Kannen.

212. Was wird unter einem Visirmaßstabe verstanden?

Ein Visirmaßstab ist ein zum leichten Messen der Fässer besonders eingerichteter Maßstab, von dem es zwei Arten, den quadratischen und cubischen, giebt. Der quadratische hat zwei Eintheilungen, eine für die Durchmesser und eine für die Länge des Fasses. Durch Multiplikation dieser beiden Eintheilungen erhält man sofort den Kanneninhalt des Gefäßes und es ist dieser Maßstab für alle Faßformen anwendbar. Der cubische Visirmaßstab enthält nur eine Eintheilung, welche sofort den Kanneninhalt eines Gefäßes zeigt. Weil jedoch dieser Maßstab nur für eine Faßform construirt ist und die größte Aehnlichkeit großer und kleiner Gefäße dieser Form voraussetzt, so ist sein Gebrauch sehr beschränkt und unsicher.

213. Auf welchen Grundsätzen beruht die Einrichtung des quadratischen Visirmaßstabes?

Nach Frage 123 verhalten sich alle gleichartig liegenden Seiten ähnlicher Flächen, also auch die Durchmesser verschiedener Kreise, wie die Quadratwurzeln dieser Flächen. Angenommen nun, man habe einen Cylinder von 1 Zoll Höhe und 71,18 □Zoll Grundfläche, so wird sein Inhalt gleich einer Dresdner Kanne sein. Der Durchmesser dieses Cylinders ist aber nach Formel 32 = 1,1284 $\sqrt{71,18}$ = 1,1284 × 8,437 oder 9,52 Zoll. Nimmt man nun andere Walzen, alle von 1 Zoll Höhe, und giebt ihnen der Reihe nach die Durchmesser 9,52 $\sqrt{2}$; 9,52 $\sqrt{3}$; 9,52 $\sqrt{4}$ u. s. f., so wird deren Inhalt 2, 3, 4 Kannen sein. Man berechne nun diese Zahlenwerthe mit Hilfe der Tafel in Fr. 27 für alle Zahlen von vielleicht

1—64 und trage diese Werthe auf einen vierkantigen, ungefähr 3 Ellen langen Maßstab auf, so kann man mit diesem sofort den Kanneninhalt einzolliger Walzen bestimmen, wenn man deren Durchmesser mit dieser Eintheilung mißt. Die fünf ersten Werthe dieser Eintheilung sind 9,52 Zoll für 1; 13,46 Zoll für 2; 16,49 Zoll für 3; 19,04 Zoll für 4; 21,29 Zoll für 5 Kannen u. s. w. Die ersten Abtheilungen zerlegt man noch in ½, ¼, ⅛ Kannen.

214. Wie ist die weitere Einrichtung dieses Maßstabes?

Nachdem die vorhin erklärte ungleiche Eintheilung auf eine Seite des Maßstabes getragen und mit Zahlen versehen worden, trägt man auf eine andere Seite die gewöhnliche Zolleintheilung. Mißt man nun bei einer Walze die Höhe mit dem Zollmaßstab und den Durchmesser mit der ungleichen Eintheilung, so giebt das Produkt beider Zahlen den Inhalt der Walze nach Kannen. Bei Tonnen mißt man Spund- und Bodendurchmesser mit der ungleichen Eintheilung, nimmt von ersterer ⅔ und von letzterer ⅓; addirt diese Theile und multiplizirt deren Summe durch die nach Zollen gemessene Länge der Tonne, wo dann das Produkt den Inhalt in Kannen zeigt. Obgleich jedoch der Gebrauch des Visirmaßstabes sehr bequem ist, so verdient trotzdem die Berechnung nach vorstehenden Regeln jederzeit den Vorzug.

215. Ein Kühlschiff, Fig. 47, ist 300 Zoll lang, 220 Zoll breit, bei a 40 Zoll, bei b 38 Zoll, bei c 32 Zoll und bei d 30 Zoll tief. Wie viel sächs. Eimer faßt es?

Durch die Diagonale ac zerfällt das Schiff in zwei schief abgeschnittene Prismen, deren Inhalt sich nach Fr. 127 auf folgende Weise berechnet: die Grundfläche des ganzen Kühlschiffs ist 66000, also die jedes Prismas 33000 □Zoll. Nun ist:

$$A = \frac{40+38+32}{3} \cdot 33000 = 110 \times 11000 = 1210000$$

$$B = \frac{40+32+30}{3} \cdot 33000 = 102 \times 11000 = 1122000$$

Inhalt des Kühlschiffs = 2332000 Cubz.

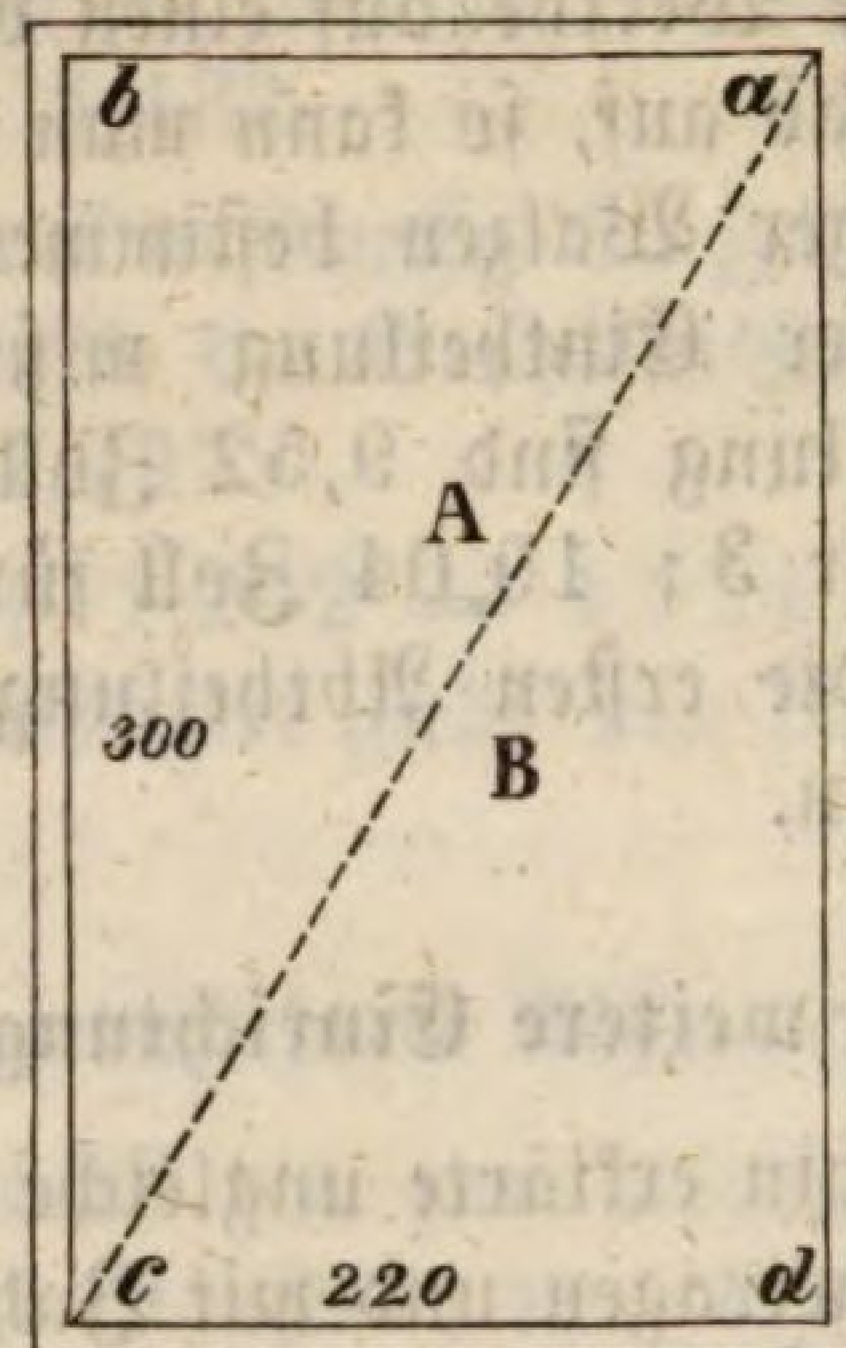


Fig. 47.

Ein Eimer enthält 72 × 71,18 = 5125 Cubikzoll und mithin faßt das Kühlschiff 2332000 : 5125 = 474½ Eimer.

216. Ein Cylinder von gegebenem Inhalte = A, soll die möglichst kleine Außenfläche = B erhalten; wie ist sein Halbmesser r und seine Höhe h zu berechnen?

Es ist hier:

125) Halbmesser $= 0{,}5419 \sqrt[3]{A}$;

126) Höhe $= 1{,}0838 \sqrt[3]{A}$;

127) Außenfläche $= 5{,}5358 \sqrt[3]{A^2}$.

Es soll z. B. ein Dresdner Maßviertel von 1975 Cubzoll in Walzenform so construirt werden, daß es die kleinste Außenfläche besitzt. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche, wie groß die Höhe und wie groß die ganze Außenfläche?

a) Der Halbmesser ist $0{,}5419 \sqrt[3]{1975} = 0{,}5419 \times 12{,}547$ $= 6{,}794$ Zoll. Der Durchmesser also 13,588 Zoll;

b) Die Höhe ist $1{,}0838 \times 12{,}547 = 13{,}596$ Zoll;

c) Die Außenfläche ist $5{,}5358 \sqrt[3]{3900625} = 5{,}5358 \times 157{,}415 = 871{,}415$ Quadratzoll.*)

217. **Umgekehrt ist die Außenfläche B eines Cylinders gegeben und es soll sein Halbmesser r, so wie seine Höhe h gefunden werden, so daß der Cylinder den größtmöglichen Raum faßt. Wie ist zu rechnen?**

Hier gelten folgende Formeln:

128) Halbmesser $= 0{,}2303 \sqrt{B}$;

129) Höhe $= 0{,}4606 \sqrt{B}$;

130) Inhalt $= 0{,}0768\, B \sqrt{B}$.

Die Walze habe z. B. 100 □Fuß Außenfläche, so ist:

a) ihr Halbmesser $= 0{,}2303 \,.\, 10 = 2{,}303$ Fuß;
b) ihre Höhe $= 0{,}4606 \,.\, 10 = 4{,}606$ Fuß;
c) ihr Inhalt $= 0{,}0768 \,.\, 100 \,.\, 10 = 76{,}8$ Cubikfuß.

218. **Wie kann der Inhalt eines Maßgefäßes nach Ausfüllung mit Wasser durch Wiegen bestimmt werden?**

Nach dem zu Ende der 44. Frage erwähnten Grundsatze füllt man das Gefäß mit Wasser und wiegt es. Die neuesten Bestimmungen ergeben nämlich, daß 1 Zollpfund Wasser bei den beigesetzten Temperaturen nach Reaumur enthält:

---

*) Die Diagonale dieses Viertels mißt $\sqrt{13{,}588^2 + 13{,}596^2}$ oder nahe 19 Zoll. Weil die Maßviertel gewöhnlich auf diese Weise construirt werden, so ist dadurch die Annahme entstanden, daß ein jedes walzenförmige Gefäß einen viertel Scheffel fasse, wenn seine Diagonale 19 Zoll messe. Wie sinnlos diese sogenannte Regel ist, geht einfach aus folgender Betrachtung hervor: Eine Walze von 1 □Zoll Grundfläche und 1975 Zoll Höhe faßt auch ein Viertel; seine Diagonale mißt aber noch etwas über 1975 Zoll und ist mithin über 100mal größer, als wie vorhin.

Fluß= oder Teichwasser.

1°	= 0,5351	sächs. K.	= 0,4373	Quart.
8°	= 0,5352	"	= 0,4373	"
12°	= 0,5355	"	= 0,4376	"
14°	= 0,5358	"	= 0,4378	"
16°	= 0,5360	"	= 0,4379	"
18°	= 0,5362	"	= 0,4382	"
20°	= 0,5366	"	= 0,4384	"

Brunnenwasser.

1°	= 0,5347	sächs. K.	= 0,4370	Quart.
8°	= 0,5349	"	= 0,4370	"
12°	= 0,5351	"	= 0,4373	"
14°	= 0,5353	"	= 0,4374	"
16°	= 0,5356	"	= 0,4376	"
18°	= 0,5359	"	= 0,4378	"
20°	= 0,5362	"	= 0,4381	"

Wäre nun z. B. ein Gefäß mit Flußwasser von 15° Wärme angefüllt und wöge dieß 176 Pfd. 17 Lth. = 176,576 Pfd., so wäre sein Rauminhalt, weil bei dieser Temperatur 1 Pfd. Wasser 0,5359 Kannen enthält, 176,567 × 0,5359 = 94,62 Dresdner Kannen.

Fünfter Abschnitt.

Die Berechnung der Baumstämme und der Erdarbeiten.

219. **Was ist im Allgemeinen über die Form eines Baumstammes zu sagen?**

Die Stämme der Laubhölzer bestehen unterhalb der Verästung aus einem kegelstutzförmigen oder walzenartigen Schafte und

werden auch wie diese Körper berechnet. Die Stämme der Nadelhölzer bilden Conoiden, deren unterer Theil hohl einwärts gebogen ist, worauf ein fast kegelstutzförmiger Theil folgt, dem sich die parabolisch nach Außen gewölbte Spitze anschließt. Die Baumform selbst ist hierbei nach Holzart, Alter und Standort sehr verschieden, weshalb auch die Stammberechnung in jedem Falle nur eine Annäherung sein kann.

220. Welche Formeln gelten zur Berechnung der Stämme?

Als Walze, nach welcher Form kurze Abschnitte am besten berechnet werden, hat man, wenn R, D, P den Radius, den Durchmesser und den Umfang am starken Ende, so wie r, d, p dieselben Stücke am schwachen Ende bezeichnen und a seine Länge; Radius, Durchmesser und Umfang in Zollen, die Länge in Fuß ausgedrückt:

131) Inhalt $= a\,(R+r)^2 \times 0{,}00545$ in Cubikfuß;
132) Inhalt $= a\,(D+d)^2 \times 0{,}00136$ " " ;
133) Inhalt $= a\,(P+p)^2 \times 0{,}000138$ " " .

Als Kegelstutz berechnet hat man, die vorigen Bezeichnungen beibehalten:

134) Inhalt $= a\,(R^2+Rr+r^2)\ 0{,}00727$ Cubikfuß.
135) Inhalt $= a\,(D^2+Dd+d^2)\ 0{,}00182$ "
136) Inhalt $= a\,(P^2+Pp+p^2)\ 0{,}000184$ "

Als parabolischen Conoid endlich:

137) Inhalt $= a\,(R^2+r^2)\ 0{,}0109$ Cubikfuß.
138) Inhalt $= a\,(D^2+d^2)\ 0{,}0027$ "
139) Inhalt $= a\,(P^2+p^2)\ 0{,}00028$ "

221. Wie werden die Stämme gewöhnlich berechnet?

Nach dem mitteln Durchmesser als Walze. Wenn hierbei der Durchmesser wirklich in Mitte des Stammes gemessen und nicht aus den beiden Enddurchmessern bestimmt wurde, so erhält man gleichzeitig, wie neuere Erfahrungen zeigen, den Cubikin-

halt am genauesten. Hierbei wird der Inhalt am leichtesten gefunden, wenn man den in Zollen gemessenen mitteln Durchmesser δ durch sich selbst, das Produkt durch die in Ellen ausgedrückte Länge a und dieses Produkt durch 0,011 multiplizirt, oder es ist:

140) Inhalt $= a \,.\, \delta^2 \,.\, 0{,}011$ Cubikfuß.

Hätte z. B. ein Stamm von 24 Ellen (48 Fuß), Länge 10 Zoll mitteln Durchmesser, so wäre sein Inhalt $= 24 \,.\, 10 \,.\, 10 \,.\, 0{,}011 = 2400 \,.\, 0{,}011 = 26{,}4$ Cubikfuß.

222. Welches sind die Inhalte der Walzen von 1—30 Ellen Länge und von 1—24 Zoll Durchmesser, letzteren von ½ zu ½ Zoll wachsend angenommen?

Dieselben sind in folgender Hilfstafel zusammengestellt:

Hilfstafel zum Berechnen der Baumstämme.

Länge in Ellen.	Durchmesser in Zollen:											
	1½	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1							1	1	1	1	1	2
2					1	1	1	1	2	2	3	3
3				1	1	1	2	2	3	3	4	5
4				1	1	2	2	3	4	4	5	6
5			1	1	1	2	3	4	4	6	7	8
6			1	1	2	2	3	4	5	7	8	9
7			1	1	2	3	4	5	6	8	9	11
8			1	1	2	3	4	5	7	9	11	13
9			1	2	2	4	5	6	8	10	12	14
10			1	2	3	4	5	7	9	11	13	16
11		1	1	2	3	4	6	8	10	12	15	17
12		1	1	2	3	5	6	8	11	13	16	19
13		1	1	2	4	5	7	9	12	14	17	20
14		1	1	2	4	6	8	10	12	15	18	22
15		1	2	3	4	6	8	11	13	16	20	24
16		1	2	3	4	6	9	11	14	18	21	25
17		1	2	3	5	7	9	12	15	19	22	27
18	1	1	2	3	5	7	10	13	16	20	24	28
19	1	1	2	3	5	8	10	13	17	21	25	30
20	1	1	2	3	5	8	11	14	18	22	26	31
21	1	1	2	4	6	8	11	15	19	23	28	33
22	1	1	2	4	6	9	12	15	19	24	29	35
23	1	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
24	1	1	2	4	7	9	13	17	21	26	32	38
25	1	1	2	4	7	10	13	18	22	27	33	39
26	1	1	3	4	7	10	14	18	23	28	34	41
27	1	1	3	5	7	11	14	19	24	30	36	42
28	1	1	3	5	8	11	15	20	25	31	37	44
29	1	1	3	5	8	11	16	20	26	32	38	46
30	1	1	3	5	8	12	16	21	27	33	39	47

Hilfstafel zum Berechnen der Baumstämme.

Länge in Ellen.	Durchmesser in Zollen:											
	12½	13	13½	14	14½	15	15½	16	16½	17	17½	18
1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4
2	3	4	4	4	5	5	5	6	6	6	7	7
3	5	6	6	6	7	7	8	8	9	10	10	11
4	7	7	8	9	9	10	11	11	12	13	13	14
5	9	9	10	11	12	12	13	14	15	16	17	18
6	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	12	13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	25
8	14	15	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28
9	15	17	18	19	21	22	24	25	27	28	30	32
10	17	18	20	21	23	25	26	28	30	32	33	35
11	19	20	22	24	25	27	29	31	33	35	37	39
12	20	22	24	26	28	29	31	34	36	38	40	42
13	22	24	26	28	30	32	34	36	39	41	43	46
14	24	26	28	30	32	34	37	39	42	44	47	50
15	26	28	30	32	34	37	39	42	45	47	50	53
16	27	30	32	34	37	39	42	45	48	50	54	57
17	29	31	34	36	39	42	45	48	51	54	57	60
18	31	33	36	39	41	44	47	50	54	57	60	64
19	32	35	38	41	44	47	50	53	56	60	64	67
20	34	37	40	43	46	49	52	56	59	63	67	71
21	36	39	42	45	48	52	55	59	62	66	70	74
22	38	41	44	47	50	54	58	61	65	69	74	78
23	40	42	46	49	53	56	60	64	68	73	77	81
24	41	44	48	51	55	59	63	67	71	76	80	85
25	43	46	50	53	57	61	66	70	74	79	84	88
26	44	48	52	56	60	64	68	73	77	82	87	92
27	46	50	54	58	62	66	71	75	80	85	90	95
28	48	52	56	60	64	69	73	78	83	88	94	99
29	50	53	58	62	67	71	76	81	86	91	97	103
30	51	55	60	64	69	74	79	84	89	95	100	106

Hilfstafel zum Berechnen der Baumstämme.

Länge in Ellen.	Durchmesser in Zollen:											
	18½	19	19½	20	20½	21	21½	22	22½	23	23½	24
1	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
2	8	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13
3	11	12	12	13	14	14	15	16	17	17	18	19
4	15	16	17	18	18	19	20	21	22	23	24	25
5	19	20	21	22	23	24	25	26	28	29	30	31
6	22	24	25	26	28	29	30	32	33	35	36	38
7	26	28	29	31	32	34	35	37	39	40	42	44
8	30	31	33	35	37	39	40	42	44	46	48	50
9	34	35	37	39	41	43	45	48	50	52	54	57
10	37	39	42	44	46	48	50	53	55	58	60	63
11	40	43	46	48	50	53	56	58	61	64	66	69
12	45	47	50	52	55	58	61	63	66	69	72	75
13	49	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	82
14	52	55	58	61	64	67	71	74	77	81	84	88
15	56	59	62	66	69	72	76	79	83	87	90	94
16	60	63	66	70	73	77	81	85	88	93	96	100
17	64	67	71	74	78	82	86	90	94	98	102	107
18	67	71	75	79	83	87	91	95	99	104	108	113
19	71	75	79	83	87	91	96	101	105	110	115	119
20	75	79	83	87	92	96	101	106	110	115	121	126
21	78	83	87	92	96	101	106	111	116	121	127	132
22	82	87	91	96	101	106	111	116	122	127	133	138
23	86	91	95	100	105	111	116	121	127	133	139	145
24	90	95	100	105	110	116	121	127	133	139	145	151
25	93	99	104	109	115	120	126	132	138	144	151	157
26	97	102	108	113	119	125	131	137	144	150	157	163
27	101	106	112	118	124	130	136	143	149	156	163	170
28	105	110	116	122	128	135	141	148	155	162	169	176
29	108	114	120	127	133	140	146	153	160	167	175	182
30	112	118	124	131	138	144	151	158	166	173	181	189

223. Wie wird der Inhalt eines Stammes durch Hilfe der vorstehenden Tafel gefunden?

Mit dem in Zollen ausgedrückten mitteln Durchmesser gehe man oben und mit der nach Ellen gemessenen Länge in die erste Spalte der Tafel ein und schreibe den, am Durchschnittspunkte beider Columnen stehenden Cubikinhalt aus. Letzterer ist stets in Cubikfuß gegeben. Wenn z. B. von drei Stämmen, von denen

a) 27 Ellen lang, unten 27″ oben 11″ stark;
b) 29 „ „ , „ 23 „ 14 „ ;
c) 24 „ „ , „ 19 „ 10 „

der Cubikfuß mit 33 Pfennigen bezahlt wird, so ist der Inhalt für a bei 19″ mittlem Durchmesser = 106 Cubikfuß; von b bei 18½″ Durchmesser = 108 Cubikfuß und von c, bei 14½″ mittlem Durchmesser = 55 Cubikfuß. Alle drei Stämme enthalten mithin 269 Cubikfuß und kosten 29 Thlr. 17,7 Ngr.

224. Wie ist zu verfahren, wenn die Länge des Stammes nicht in der Tafel enthalten ist?

Ist der Stamm bei 22 Zoll mittler Stärke 17½ Ellen lang, so liegt sein Inhalt zwischen den bei 17 u. 18 Ellen angegebenen, also zwischen 90 u. 95; er wird also 93 Cubikfuß gesetzt werden.

Wäre hingegen ein Stamm bei 17½ Zoll mittler Stärke 37 Ellen lang, so wäre:

Inhalt für 30 Ellen Länge = 100 Cubikfuß.
„ „ 7 „ „ = 23 „

Inhalt des ganzen Stammes = 123 Cubikfuß.

225. Wie groß ist der Unterschied der Inhalte eines Stammes, wenn derselbe nach dem mitteln Durchmesser als Walze und sodann nach beiden Durchmessern als Kegelstutz berechnet wird?

Nach den oben eingeführten Benennungen ist der Inhalt eines Stammes

als Kegelstutz $= (R^2 + Rr + r^2)\ ^1\!/_3\ h\pi$
als Walze $= (R^2 + 2Rr + r^2)\ ^1\!/_4\ h\pi$
mithin ist:

141) Unterschied $= (^1\!/_{12}\ R^2 - {}^1\!/_6\ Rr + {}^1\!/_{12}\ r^2)\ h\pi$

$$= \tfrac{1}{3}\left(\frac{R - r}{2}\right)^2 h\pi$$

d. h. der als Walze nach dem mitteln Durchmesser (nicht dem in der Mitte gemessenen Durchmesser, Frage 221) berechnete Stamm ist zu klein, um den Inhalt einer Walze, welche den halben Unterschied beider Stammdurchmesser zum Durchmesser und den dritten Theil der Baumlänge zur Höhe hat.

Für einen Stamm von $\frac{10 + 4}{24}$ hat man z. B.

a) Inhalt nach voriger Tafel als Walze = 13 Cubikfuß.
b) Correktur: Inhalt einer Walze von
$\frac{10 - 4}{2} = 3$ Z. Durchmesser und
$^{24}\!/_3 = 8$ F. Länge . . . . . = 1 „

c) Inhalt des Stammes als Kegelstutz = 14 Cubikfuß.

226. **Was ist im Allgemeinen über die Berechnung von Ausgrabungen zu sagen?**

Bei fast allen Bauten ist es nothwendig, eine gewisse Masse Erde zur festen Begründung des Baues auszugraben, welche Arbeit gewöhnlich im Akkord nach Cubikellen, Cubikruthen ꝛc. verdungen wird. Für den zu gewährenden Akkordsatz ist keine feste Norm möglich, indem Verschiedenheit der Bodenart, Tiefe der Ausgrabung, die Weite der zu transportirenden Masse u. s. w. gar gewaltig groß ist. Nur die Erfahrung kann hier die nöthigen Fingerzeige geben.

Die Gründung von Gebäuden, als da sind Ausgrabungen der Keller, Grundmauern, Souterrains ꝛc., sind in der Regel parallelepipedisch, und es bietet deshalb ihre Berechnung keine besondere Schwierigkeit. Etwas anders ist es bei Anlage von Dämmen, Ausgrabungen (Durchstichen) ꝛc., doch wird auch hier die Berechnung auf einfache Grundformen zurückgeführt.

227. **Bei einem Neubaue sind an Ausgrabungen nothwendig: a) Ein Keller, 16⁰ lang, 6⁰ breit, 6⁰ tief, à CbElle 1 Ngr. — b) 100 laufende Ellen Umfassung, 2⁰ breit, 2⁰ tief, à CbElle 8 Pfg. — c) 60 laufende Ellen Scheidewand, 1⁰ breit, 1⁰ tief, à CbElle 6 Pfg. — d) Eine Senkgrube, 4⁰ lang, 4⁰ breit, 3⁰ tief, à CbElle 7 Pfg. (sächs.). Wie theuer ist die Ausgrabung?**

Es berechnen sich die Ausgrabungen auf folgende Weise:

a) der Keller enthält $16 \times 6 \times 6$ = 576 CbEll. à 1 Ngr. . . =	19 *Rt.*	6 *Ngr.*	— *Pfg.*
b) die Umfassungsmauer hält $100 \times 2 \times 2$ = 400 CbEll. à 8 Pfg. . . . . =	10 „	20 „	— „
c) die Scheidemauer hat $60 \times 1 \times 1$ = 60 CbEll. à 6 Pf. . . . . =	1 „	6 „	— „
d) die Senkgrube endlich umfaßt $4 \times 4 \times 3$ = 48 CbEll. à 7 Pf. =	1 „	3 „	6 „
mithin kostet die Ausgrabung =	32 *Rt.*	5 *Ngr.*	6 *Pfg.*

228. **Auf welche Weise wird bei Ausgrabungen mit unebener Oberfläche gerechnet?**

Es stelle Fig. 48 den Grundriß der auszugrabenden Fläche vor. Durch Messung ist die Grundfläche derselben bestimmt und

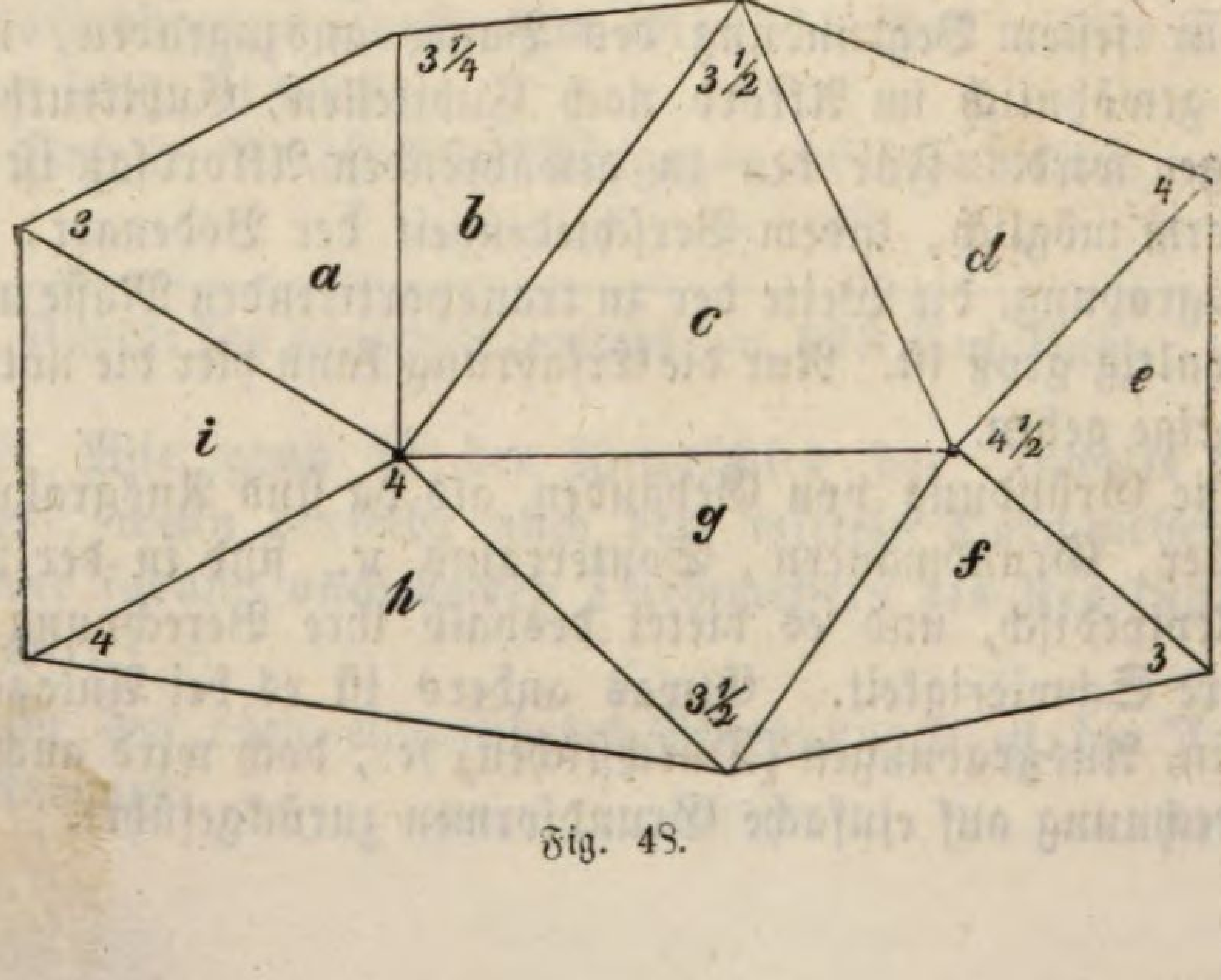


Fig. 48.

durch Nivellement ist festgesetzt, wie tief die Ausgrabung an den Punkten, in denen die Dreiecke a, b, c ꝛc. zusammenstoßen, sein muß. Die ganze Ausgrabung wird hierdurch in schief abgeschnittene dreiseitige Prismen zerlegt, welche einzeln nach Frage 127 berechnet werden.

Es seien z. B. gefunden worden: Dreieck a = 24 □Ellen; b = 25 □⁰; c = 26 □⁰; d = 30 □⁰; e = 30 □⁰; f = 40 □⁰; g = 50 □⁰; h = 40 □⁰; i = 30 □⁰ und die Höhen in den Eckpunkten dieser Dreiecke, wie solche die Figur zeigt, so ist:

$$a = \frac{3 + 3\tfrac{1}{4} + 4}{3} \times 24 \ldots = 82 \text{ Cubikellen.}$$

$$b = \frac{3\tfrac{1}{4} + 3\tfrac{1}{2} + 4}{3} \times 25 \ldots = 89{,}7 \quad ''$$

$$c = \frac{4 + 3\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}}{3} \times 26 \ldots = 104 \quad ''$$

$$d = \frac{3\tfrac{1}{2} + 4 + 4\tfrac{1}{2}}{3} \times 30 \ldots = 120 \quad ''$$

$$e = \frac{4 + 4\tfrac{1}{2} + 3}{3} \times 30 \ldots = 115 \quad ''$$

$$f = \frac{3 + 3\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2}}{3} \times 40 \ldots = 146{,}7 \quad ''$$

$$g = \frac{3\tfrac{1}{2} + 4\tfrac{1}{2} + 4}{3} \times 50 \ldots = 200 \quad ''$$

$$h = \frac{4 + 4 + 4\tfrac{1}{2}}{3} \times 40 \ldots = 166{,}6 \quad ''$$

$$i = \frac{4 + 3 + 4}{3} \times 30 \ldots = 110 \quad ''$$

Gesammtausgrabung = 1134 CbEll.

229. Welche Vorarbeiten sind zur Berechnung der Erdmasse eines Dammes oder eines Durchschnittes nothwendig?

Bei Chaussee-, Eisenbahn- und Dammbauten kommen kubische Berechnungen der zu bewegenden Erdmassen zahlreich vor, und obgleich sie keine besondere Schwierigkeit bieten, sind sie doch höchst zeitraubend.

Jeder solchen Berechnung müssen die genauesten Vermessungen und Nivellements vorausgehen und es ist sorgfältige Zeichnung des Grundrisses, Fig. 49, des Längenprofils, Fig. 50,

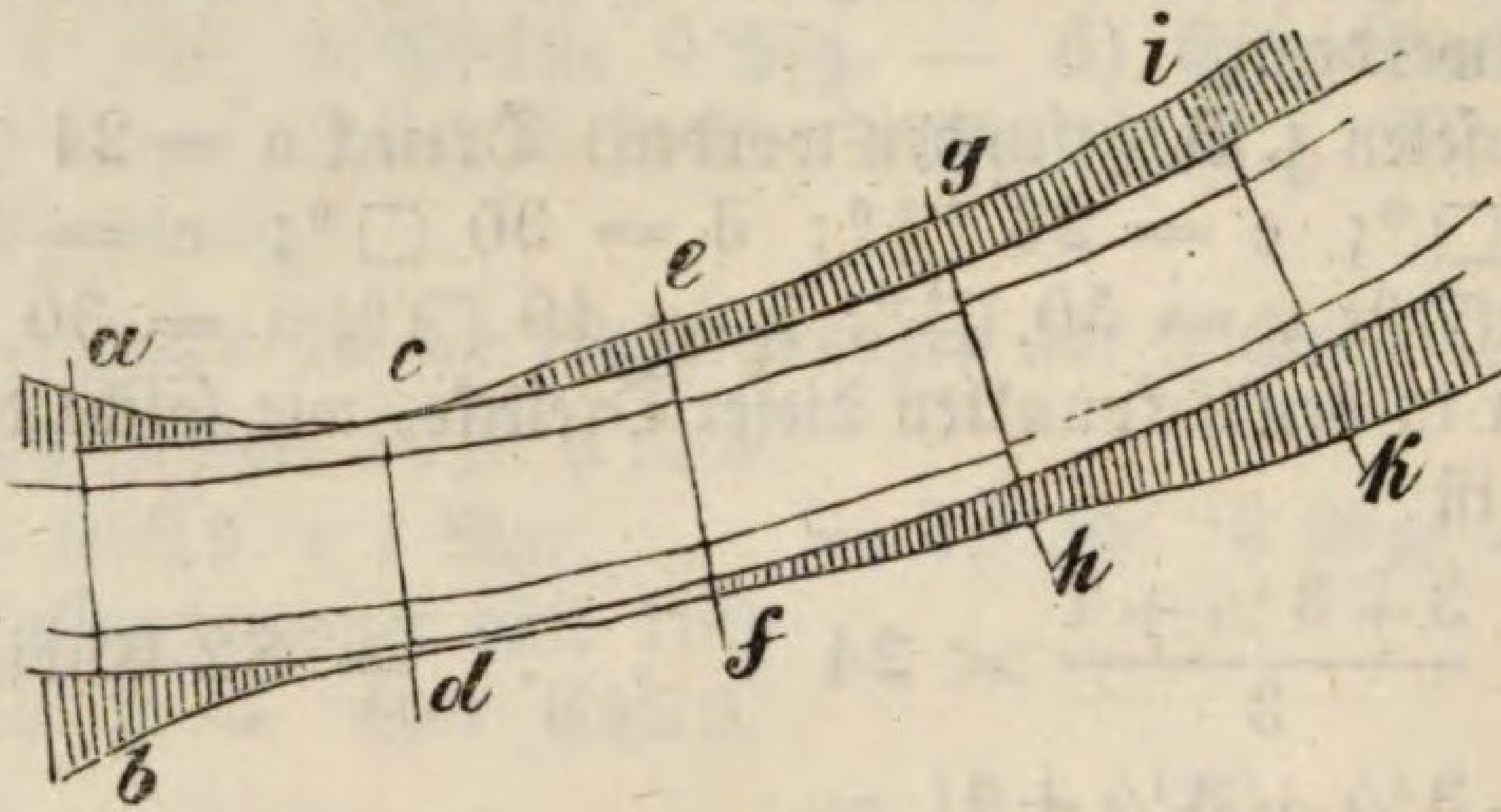


Fig. 49.

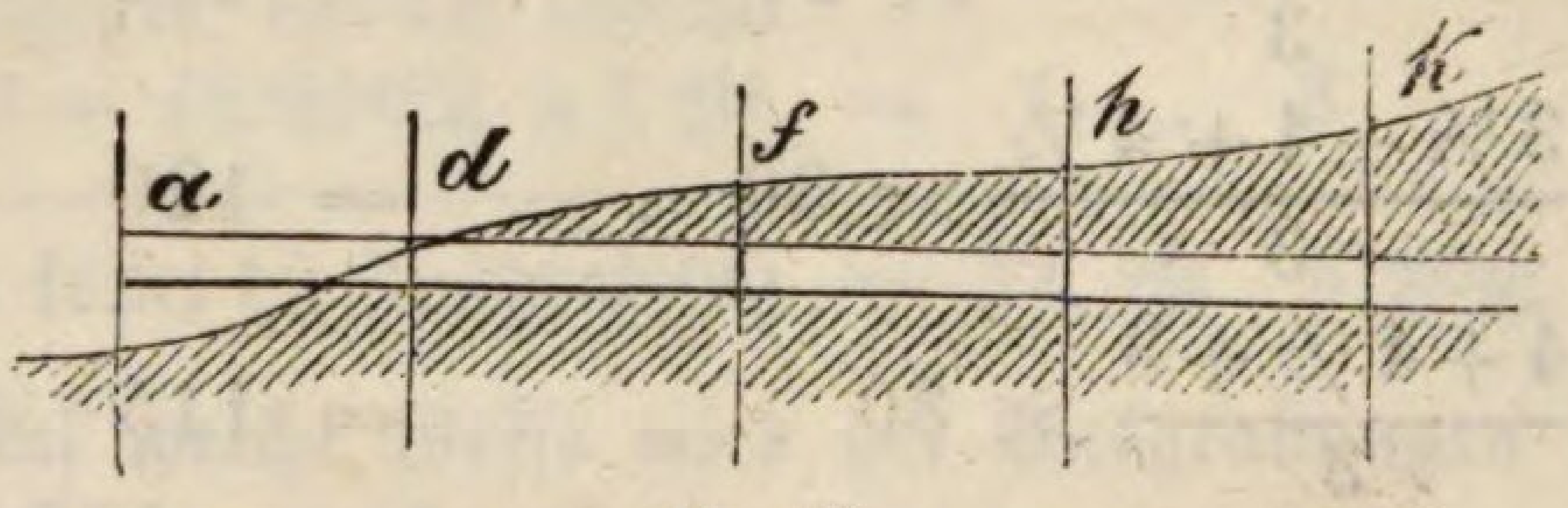


Fig. 50.

und des Querschnittes, Fig. 51, unerläßlich. Von diesen Zeichnungen werden die zur Berechnung nöthigen Maße mit dem

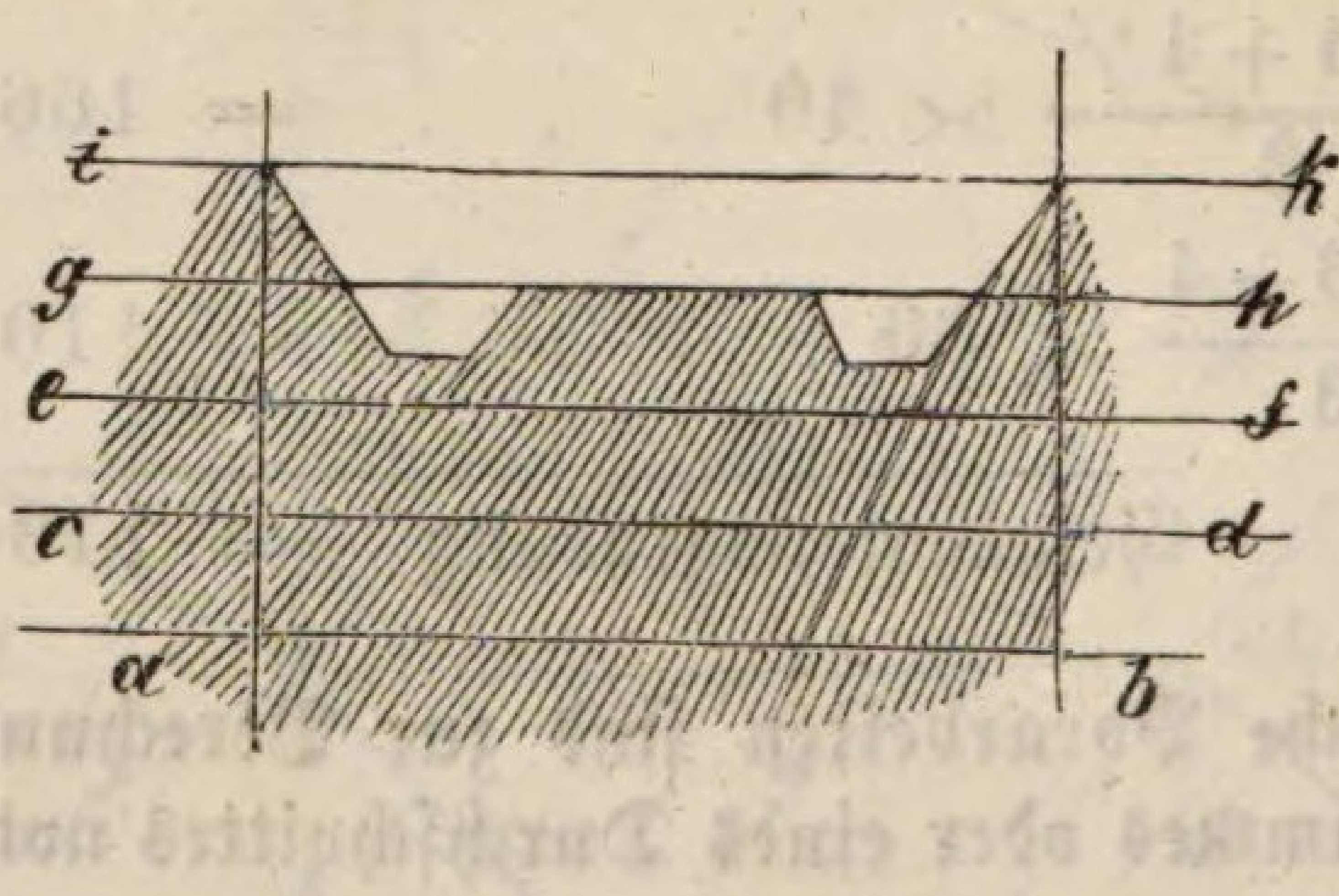


Fig. 51.

Zirkel abgenommen. Bei der Berechnung selbst zerlegt man den betreffenden Körper in gewissen Abständen, z. B. von 100 zu

100 Ellen, in Abschnitte und berechnet solche durch Annäherung, so scharf es möglich ist.

Die Querschnitte kommen hierbei in drei verschiedenen Grundformen vor. Wenn nämlich in Fig. 52, 53, 54 die

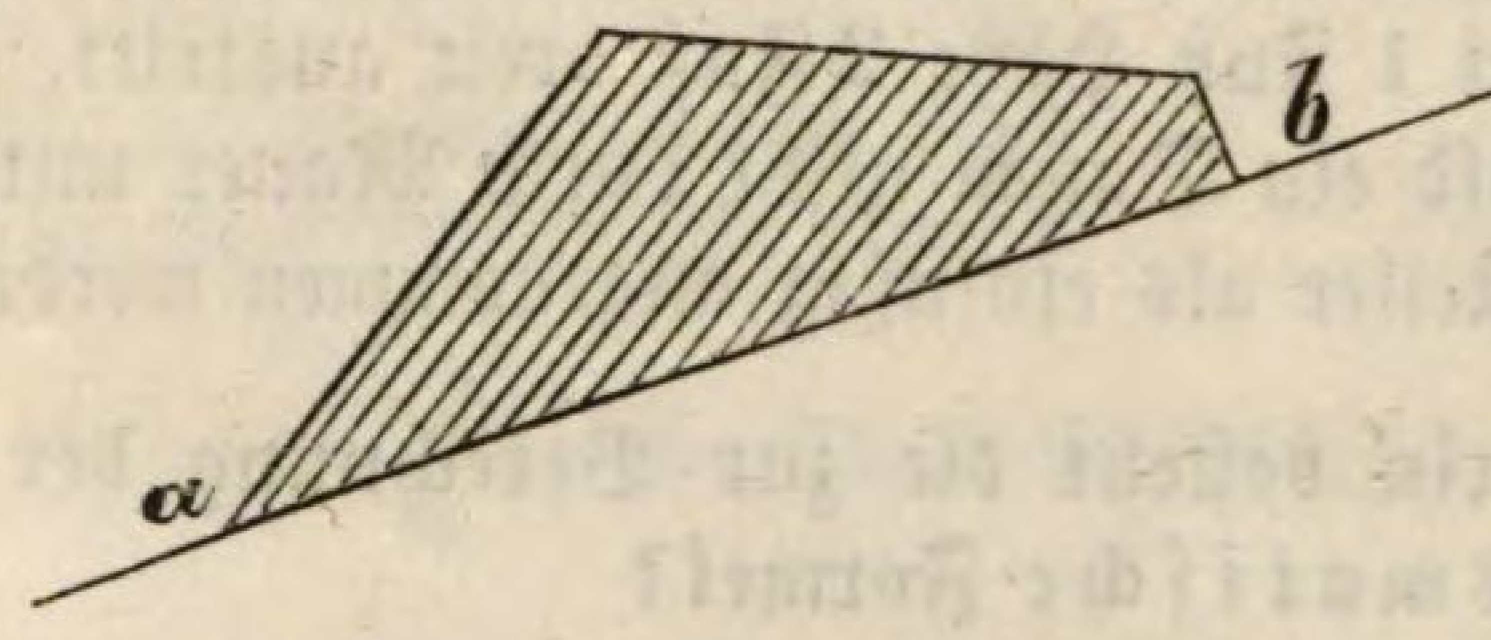


Fig. 52.

Linie ab als natürliche Erdfläche gilt, so ist Fig. 52 ein voller Damm, Fig. 53 ein Halbdamm mit Einschnitt und Fig. 54 ein



Fig. 53.

voller Einschnitt. Die Form der Böschung hat hierbei keinen Einfluß auf die allgemeine Berechnungsweise.

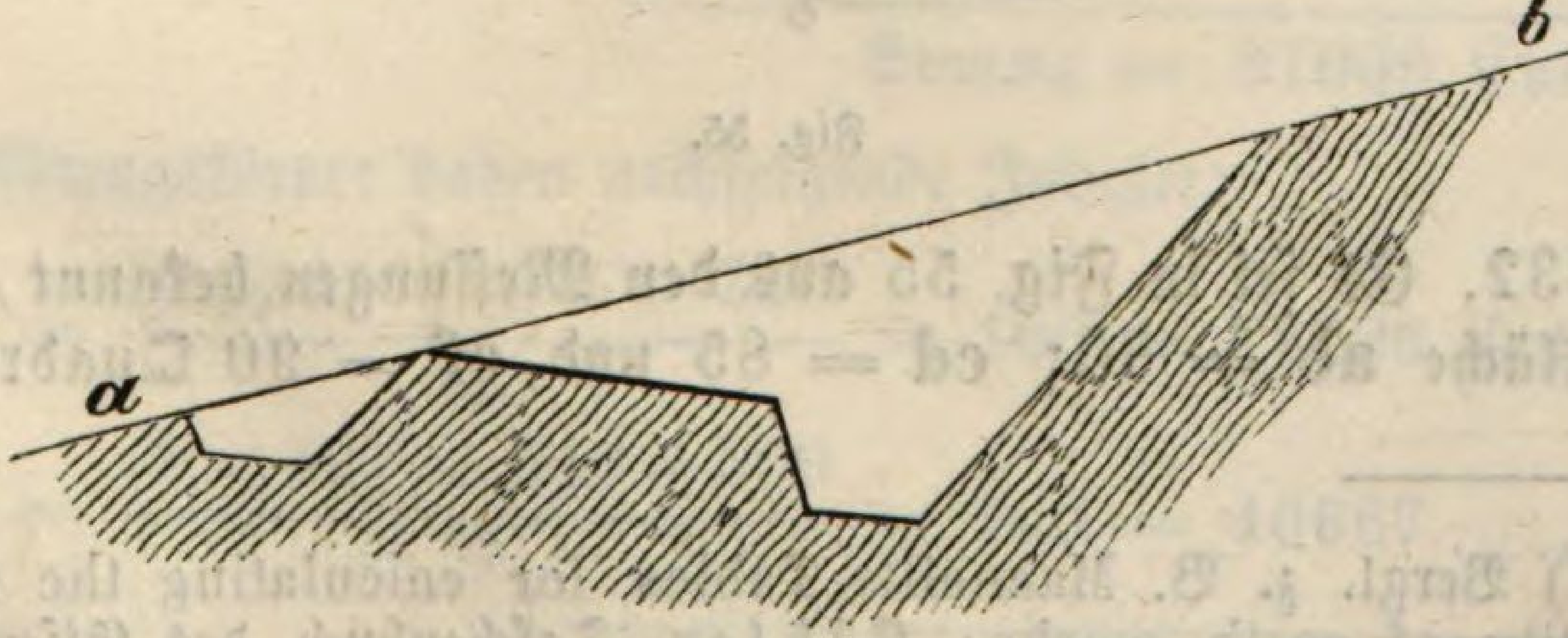


Fig. 54.

230. Was ist unter der Böschung zu verstehen?

Unter Böschung versteht man die schiefe Abdachung eines Dammes oder Einschnittes. Nach dem Maß ihrer Neigung haben sie verschiedene Benennungen. So heißt z. B. ein Damm, welcher bei 1 Fuß Höhe auch 1 Fuß auslabet, einfüßig; ein solcher, der bei 1 Fuß Höhe 2 Fuß breit austritt, zweifüßig, u. s. f. Sobald ein Damm nicht durch Mauer unterstützt wird, kann er nicht steiler als einfüßig angenommen werden.

231. Worin besteht die zur Berechnung der Erdarbeiten dienende prismatische Formel?

Dieselbe ist durch vielfache Erfahrung als die zu vorliegendem Zwecke am brauchbarsten befundene. Nennt man in Fig. 55 den Querschnitt ab = c; den Querschnitt ef = b; den Mittelschnitt cd = a und die Körperlänge bf = h, so ist:

$$142)\ \text{Inhalt} = \frac{[4\,a + (b + c)] \times 1}{6}$$

Zur Erleichterung beim Berechnen sind besondere Hilfstafeln construirt worden *).

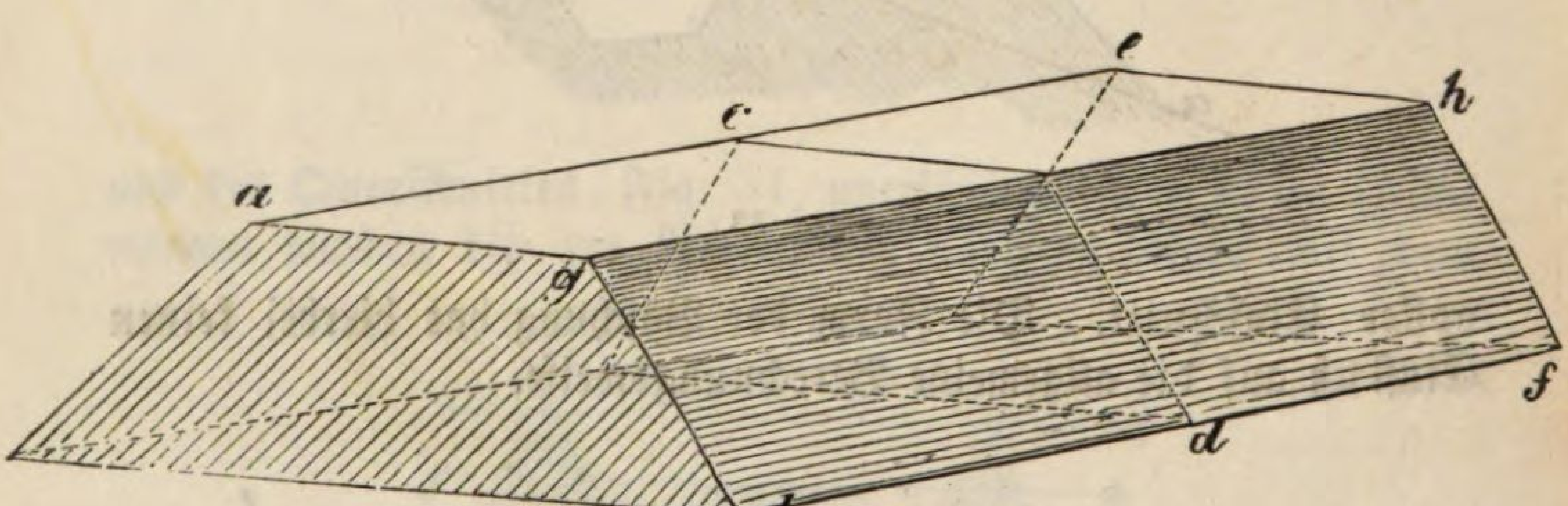


Fig. 55.

232. Es sei in Fig. 55 aus den Messungen bekannt, daß die Fläche ab = 80; cd = 85 und ef = 90 Quadratfuß

---

*) Vergl. z. B. Macneills Tables for calculating the Cubik Quantity of earth works; Köhler, Taschenbuch des Eisenbahnwesens u. a. m.

ist. Ferner beträgt die Länge gh = 100 Fuß; wie groß ist der Körper?

Hier hat man nach Formel 142

$$\text{Inhalt} = \frac{[4 \,.\, 85 + (80 + 90)] \times 100}{6};$$

$$= \frac{(340 + 170)\ 100}{6}$$

$$= \frac{51000}{6} = 8500 \text{ Cubikfuß.}$$

233. **Wie wird die Berechnung für den Bahnkörper, Fig. 49, 50, 51, ausgeführt?**

Der Körper sei von 100 zu 100 Ellen in Querschnitte getheilt; ferner sei von a bis f Auftrag, von f bis k Abtrag nothwendig und es seien die Querschnitte nach der Bezeichnung in Fig. 50:

a = 220 □Ell.; d = 180 □Ell.; Mitte = 200 □Ell.
f = 0 □Ell.; Mitte zwischen d u. f = 120 □Ell.;
h = 340 □Ell.; Mitte zwischen f u. h = 190 □Ell.;
k = 500 □Ell.; Mitte zwischen h u. k = 400 □Ell.

Die Inhalte der Auftragskörper sind nun folgende:

$$ad = \frac{(4 \times 200) + 220 + 180}{6} \times 100 = 20000 \text{ CubEll.}$$

$$df = \frac{(4 \times 120) + 0 + 180}{6} \times 100 = 11000 \quad ''$$

Summa = 31000 CubEll.

Die Abtragskörper haben nachfolgende Inhalte:

$$fh = \frac{(4 \times 190) + 0 + 340}{6} \times 100 = 18333 \text{ CubEll.}$$

$$hk = \frac{(4 \times 400) + 340 + 500}{6} \times 100 = 40667 \quad ''$$

Summa = 59000 CubEll.

234. In Fig. 56 ist der Längenaufriß und in Fig. 57 der mittlere Querschnitt eines, in einen Einschnitt geklemmten Dammes vorgestellt. Wie ist derselbe zu berechnen?

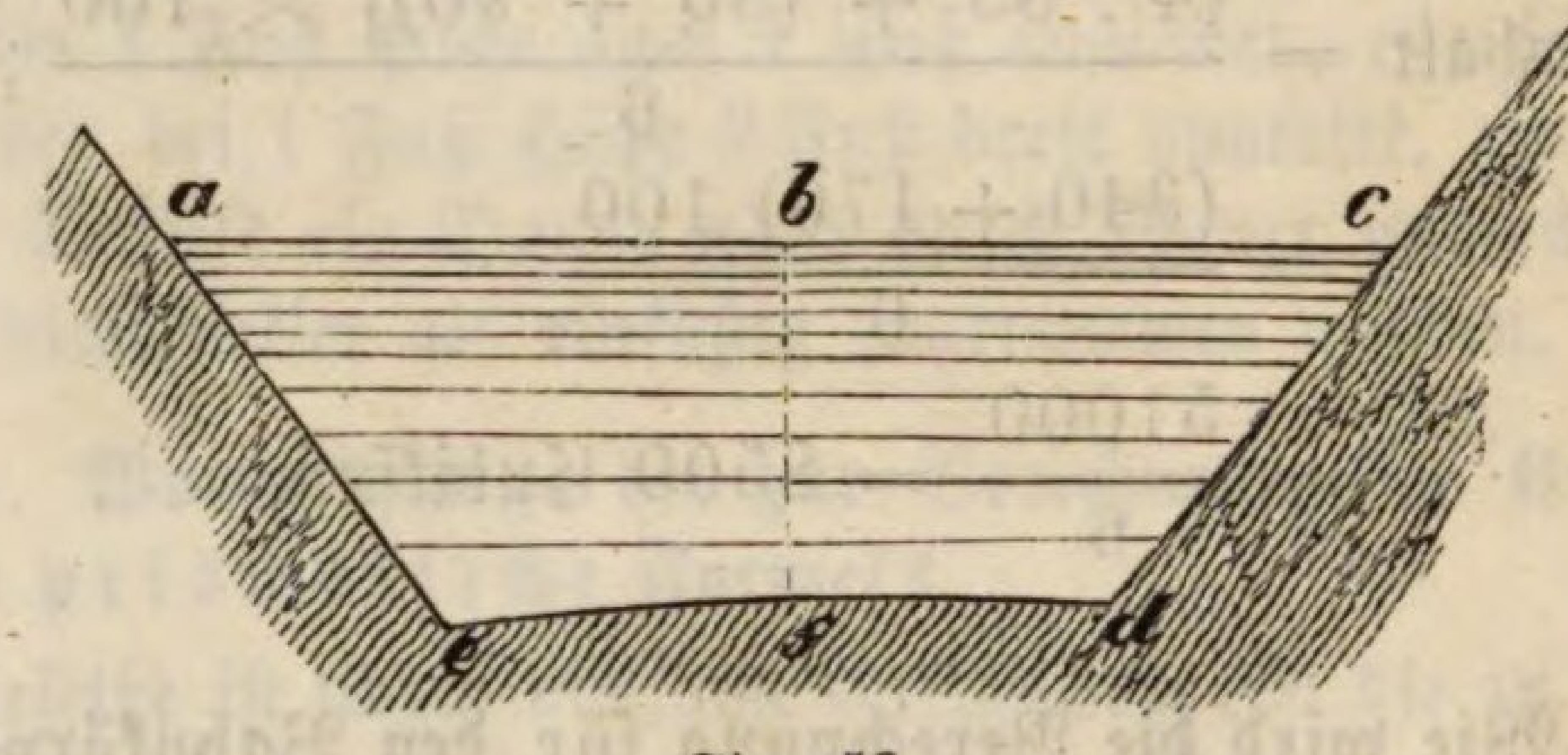


Fig. 56.

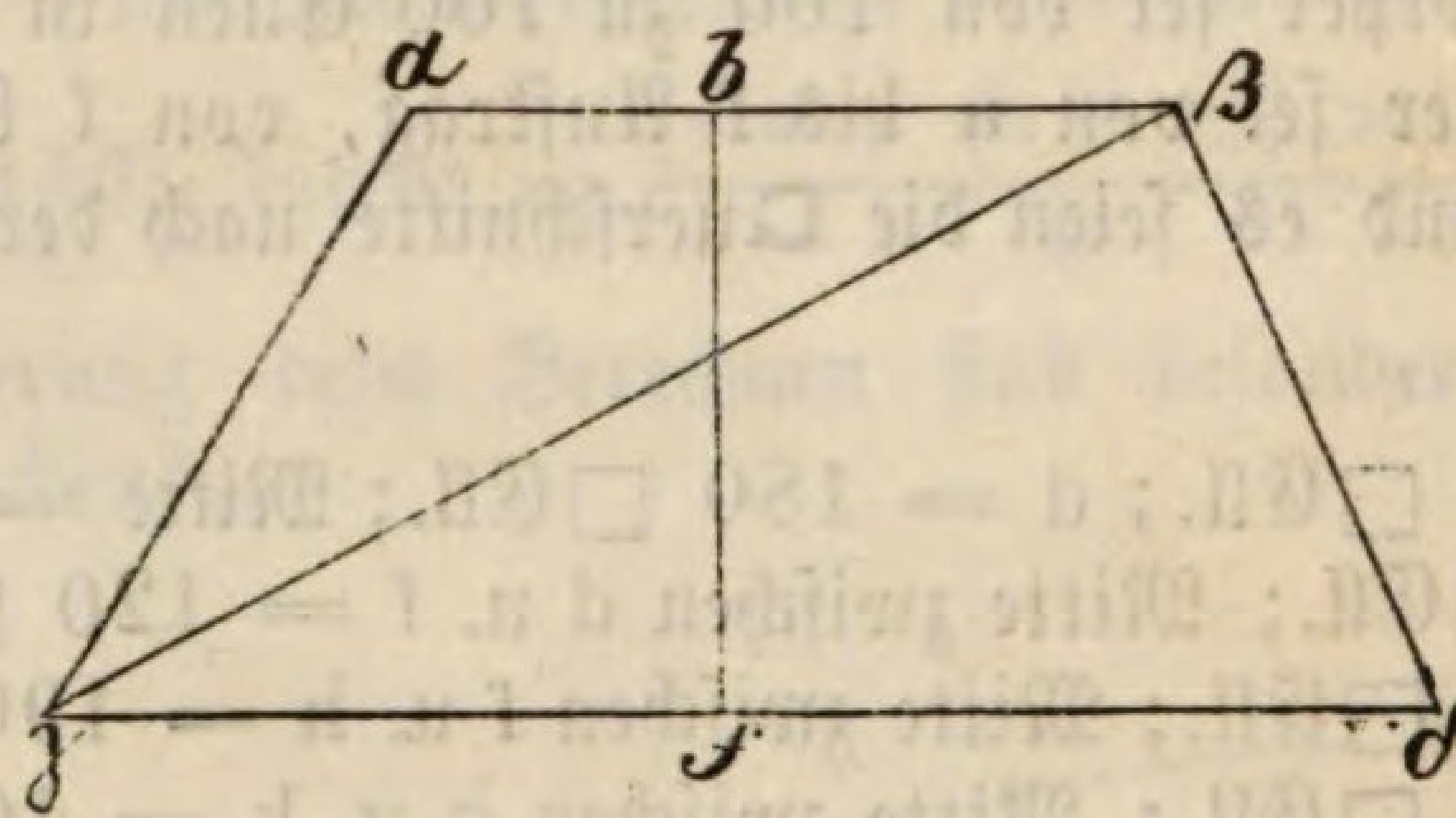


Fig. 57.

Bei strenger Rechnung müßte der Körper durch einen Querschnitt $\alpha\beta$ in zwei dreiseitige Prismatoiden zerfällt und als solche berechnet werden; doch genügt in der Regel die Berechnung als Obelisk.

Ries'sche Buchdruckerei (Carl B. Lorck) in Leipzig.